ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γιαννιώτης Παναγιώτης

Το θεώρημα της σφαίρας στην γεωμετρία Riemann

Επιβλέπων: κ. Αντώνιος Μελάς

ΑΘΗΝΑ
2008

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το θεώρημα της σφαίρας είναι ένα από τα πρώτα αποτελέσματα της γεωμετρίας Riemann στο οποίο η τοπολογία μιας πολλαπλότητας Riemann καθορίζεται από ανισότητες που περιορίζουν την καμπυλότητά της. Η τελική του μορφή αποδείχθηκε από τον W.Klingenberg το 1961:

Θεώρημα 1.1 *Μια πλήρης, απλά συνεκτική, πολλαπλότητα Riemann M διάστασης n, της οποίας η καμπυλότητα ικανοποιεί την ανισότητα*

$$1 \geq K_M > \frac{1}{4}$$

είναι ομοιομορφική με την σφαίρα διάστασης n.

Η ιδέα ότι μια πολλαπλότητα που η καμπυλότητά της είναι κοντά στην καμπυλότητα της σφαίρας ενδέχεται να εξακολουθεί να είναι σφαίρα από τοπολογική άποψη, ξεκίνησε από τον Rauch, ο οποίος το 1951 απέδειξε μια πιο ασθενή μορφή του θεωρήματος για δ-pinched πολλαπλότητες, δηλαδή με $1 \geq K_M > \delta$, με $\delta \approx 0.74$. Μάλιστα, τότε ήταν που ανέπτυξε τα γνωστά θεωρήματα σύγκρισης της γεωμετρίας Riemann, που πλεον φέρουν το όνομά του, ώστε να ελέγξει την γεωμετρία της εκθετικής απεικόνισης.

Το πρώτο βήμα για την βελτίωση του αποτελέσματος του Rauch έγινε το 1959 από τον Klingenberg, ο οποίος εισήγαγε την έννοια της injectivity radius και κατόρθωσε, στην περίπτωση μιας πολλαπλότητας άρτιας διάστασης, απλά συνεκτικής με άνω φραγμένη θετική καμπυλότητα, να αποδείξει το θεώρημα , δίνοντας έτσι ένα ικανοποιητικό κάτω φράγμα γι'αυτήν. Στην συνέχεια, με γνώση αυτού του θεωρήματος πλέον, απέδειξε το θεώρημα της σφαίρας, για μια σταθερά ≈ 0.55, μικρότερη από το 0.74 του Rauch, στην περίπτωση όμως μόνο πολλαπλοτήτων άρτιας διάστασης.

Το θεώρημα του Klingenberg αποτέλεσε επίσης το έναυσμα για την δουλειά του M.Berger πάνω στο τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας. Συνδυάζοντας την εκτίμηση του Klingenberg για την injectivity radius με το θεώρημα του Toponogov το οποίο μόλις είχε εμφανιστεί, κατάφερε να αποδείξει το τελικό θεώρημα, πάλι όμως για πολλαπλότητες άρτιας διάστασης. Το πλεονέκτημα όμως του επιχειρήματός του ήταν ότι ο μόνος περιοριστηκός παράγοντας που το εμπόδιζε να εφαρμοστεί και σε πολλαπλότητες με περιττή διάσταση ήταν απλά η έλλειψη μιας αντίστοιχης εκτίμησης της injectivity radius για αυτές τις πολλαπλότητες.

Τελικά, ο Klingenberg, το 1961, κατόρθωσε να επεκτείνει την εκτίμηση και σε πολλαπλότητες περιττής διάστασης, με την επιπλέον υπόθεση ότι $K \geq K_M > \frac{K}{4}$, εφαρμόζοντας αποτελέσματα της θεωρίας Morse στον χώρο των κλειστών καμπύλων μιας πολλαπλότητας Riemann, αποδεικνύοντας παράλληλα και το θεώρημα της σφαίρας στην τελική του μορφή.

Ενώ στην περίπτωση διάστασης 2, η εφαρμογή του θεωρήματος Gauss-Bonnet, εξασφαλίζει ότι κάθε επιφάνεια ομοιομορφική με σφαίρα είναι και αμφιδιαφορική με αυτήν, ήδη από το 1956 ο Milnor είχε αποδείξει ότι υπάρχουν εξοτικές 7-σφαίρες, δηλαδή πολλαπλότητες ομοιομορφικές με σφαίρα, με διαφορετική όμως διαφορική δομή. Δεν είναι γνωστό όμως αν κάποια από αυτές δέχεται μετρική με γνήσια θετική καμπυλότητα. Επομένως, το ερώτημα αν μπορεί να βελτιωθεί το τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας, σε ένα διαφορίσιμο θεώρημα ώστε κάθε πολλαπλότητα που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του να είναι τελικά αμφιδιαφορική με σφαίρα, είχε και έχει ακόμα ενδιαφέρον.

Ένα διαφορίσιμο θεώρημα της σφαίρας αποδείχθηκε πρώτα από τους Gromol και Calabi, το 1966, το οποίο εξασφαλίζει ότι ύπαρχουν σταθερές δ_n ώστε κάθε n-διάστατη απλά συνεκτική πολλαπλότητα με $1 \geq K_M > \delta_n$ να είναι αμφιδιαφορική με σφαίρα. Δυστυχώς όμως οι σταθερές δ_n εξαρτώνται από την διάσταση και επιπλέον $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$.

Ο Shiohama απέδειξε στην συνέχεια ότι υπάρχει σταθερά pinching ανεξάρτητη της διάστασης η οποία βελτιώθηκε το 1971 διαδοχικά από τους Sugimoto, Shiohama και Karcher, και Ruh, καταλήγοντας σε μια σταθερά ≈ 0.80. Τέλος, το 1990, ο Suyama απέδειξε ένα διαφορίσιμο θεώρημα σφαίρας για 0.68-pinched πολλαπλότητες.

Τελικά, το 2007 οι S.Brendle,R.Schoen, εφαρμόζοντας την μέθοδο της Ricci flow απέδειξαν καποια ισχυρά αποτελέσματα σχετικά με την ταξινόμηση των πολλαπλότητων με κατά σημείο pinching$\geq \frac{1}{4}$, τα οποία επίσης δίνουν καταφατική απάντηση στο ερώτημα αν οι υποθέσεις του τοπολογικού θεωρήματος της σφαίρας είναι ικανές να εξασφαλίσουν ότι η πολλαπλότητα είναι αμφιδιαφορική με σφαίρα.

Σε αυτήν την εργασία, στο κεφαλαιο 3 αποδεικνύεται διεξοδικά το θεώρημα του Toponogov, ενώ στο κεφάλαιο 4 ορίζονται οι έννοιες cut point, cut locus και injectivity radius, και στη συνέχεια αποδεικνύονται τα δυο θεωρήματα του Klingenberg για την εκτίμησή της.

Στο πεμπτο κεφάλαιο, αποδεικνύεται το τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας στην τελική του μορφή, καθώς επίσης και το θεώρημα μεγιστικής διαμέτρου του Toponogov. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζεται ο μιγαδικός προβολικός χώρος που δείχνει ότι για άρτια διάσταση το θεώρημα είναι βέλτιστο, ενώ παρουσιάζονται διάφορα αποτελέσματα σχετικά με πιο ασθενείς υποθέσεις για το pinching.

Στο τελευταίο, έκτο κεφάλαιο, αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας σταθεράς $\delta \geq \frac{1}{4}$, ανεξάρτητης της διάστασης, ώστε κάθε δ-pinched απλά συνεκτίκη πολλαπλότητα να είναι αμφιδιαφορική με την σφαίρα. Η απόδειξη ακολουθεί την ιδέα των Sugimoto, Shiohama, Karcher στο [13], χωρίς όμως τις τεχνικές λεπτομέρειες που εμφανίζονται στην προσπάθεια εκτίμησής της σταθεράς.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή Αντώνιο Μελά και στον αναπληρωτή καθηγητή Διονύσιο Λάππα του Τμήματος Μαθηματικών για την καθοδήγηση και υποστήριξή τους κατά την εκπόνηση της εργασίας μου καθώς και στον καθηγητή Αθανάσιο Τσαρπαλιά για την συμμετοχή του στην τριμελή επιτροπή.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

2.1 Μετρική Riemann και συναλλοίωτη παραγώγιση

Ορισμός 2.1 *Μια μετρική Riemann σε μια διαφορική πολλαπλότητα M είναι η αντιστοίχιση σε κάθε $p \in M$ μιας συμμετρικής, θετικά ορισμένης διγραμμικής μορφής $\langle\ ,\ \rangle_p$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM, έτσι ώστε αν $V, W \in \chi(M)$ διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία της M, η συνάρτηση*

$$p \mapsto \langle V, W \rangle_p$$

να είναι διαφορίσιμη. Μια διαφορική πολλαπλότητα εφοδιασμένη με μια μετρική Riemann οναμάζεται πολλαπλότητα Riemann.

Ορισμός 2.2 *Μια συνοχή στην M είναι μια $\Re$-διγραμμική απεικόνιση*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\nabla_{fV} W = f \nabla_V W \tag{2.1}$$

$$\nabla_V fW = (Vf)W + f \nabla_V W \tag{2.2}$$

για κάθε C^∞ συνάρτηση f στην M, και $V, W \in \chi(M)$, όπου $\nabla_V W = \nabla(V, W)$. Το διανυσματικό πεδίο $\nabla_V W$ θα το ονομάζουμε συναλλοίωτη παράγωγο του W στην διεύθυνση του V.

Αν $U \subset M$ ένα ανοιχτό υποσύνολο της M και $\varphi : U \to \Re^n$ ένας χάρτης της M, τότε ορίζονται τα σύμβολα Christofel της συνοχής, που είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις Γ_{ij}^k ώστε

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Εκφράζοντας την $\nabla_V W$, για δυο πεδία $V = \sum_{k=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W = \sum_{k=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ως προς ένα χάρτη μπορούμε να δούμε ότι η συναλλοίωτη παράγωγος $(\nabla_V W)(p)$ εξαρτάται μόνο από το $V(p)$ και από το W περιορισμένο σε οποιαδήποτε καμπύλη που διέρχεται από το p με διεύθυνση $V(p)$. Μάλιστα, αν $c : I \to M$ μια καμπύλη και $V(t)$ ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της (δηλαδή $V(t) \in T_{c(t)}M$), μπορούμε να ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο αυτού του πεδίο κατά μήκος της c ως

$$\frac{d}{dt}c(t) = \nabla_{c'(t)}V(t)$$

Ένα θεμελιώδες θεώρημα στην γεωμετρία Riemann είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.1 *Αν M είναι πολλαπλότητα Riemann, τότε υπάρχει μοναδική συνοχή, με τις εξής ιδιότητες:*

$$X\langle V, W\rangle = \langle \nabla_X V, W\rangle + \langle V, \nabla_X W\rangle \tag{2.3}$$

$$\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W] = 0 \tag{2.4}$$

όπου $[\ ,\ ]$ συμβολίζει την αγκύλη Lie, με $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Αυτήν τη συνοχή θα την ονομάζουμε συνοχή Riemann, ή συνοχή Levi-Civita.

Στο εξής μια πολλαπλότητα Riemann θα θεωρούμε ότι είναι εφοδιασμένη με αυτή την συνοχή.

Αν $c : [0, l] \to M$ μια καμπύλη τότε σε μια πολλαπλότητα Riemann το μήκος της ορίζεται ως

$$L(c) = \int_0^l \|c'(t)\| dt$$

2.2 Παράλληλα πεδία και γεωδαισιακές. Η εκθετική απεικόνιση

Ορισμός 2.3 *Ένα διανυσματικό πεδίο $V(t)$ πάνω σε μια καμπύλη c θα το ονομάζουμε παράλληλο αν*

$$\nabla_{c'(t)}V(t) \equiv 0$$

Μάλιστα, για κάθε $v \in T_{c(0)}M$ υπάρχει μοναδικό παράλληλο διανυσματικό πεδίο V στην c ώστε $V(0) = v$, το οποίο ονομάζεται παράλληλη μετατόπιση του v κατά μήκος της c. Το πεδίο αυτό είναι η λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$\nabla_{c'(t)}V(t) = 0$$

Για κάθε t, λοιπόν, ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση

$$P_t : T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M$$

$$\text{με } P_t(v) = V(t)$$

Επιπλέον, στην περίπτωση της συνοχής Riemann, λόγω της συνθήκης (1.3) που ικανοποιεί, η P_t είναι ισομετρία.

Ορισμός 2.4 *Μια καμπύλη $\gamma : I \to M$ θα ονομάζεται γεωδαισιακή αν*

$$\nabla_{c'(t)} c'(t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in I \tag{2.5}$$

Από το θεώρημα ύπαρξης, για κάθε $p \in M$ και $v \in T_pM$, υπάρχει μοναδική λύση γ_v της (1.5) με $\gamma_v(0) = p$ και $\gamma_v'(0) = v$, η οποία ορίζεται σε καποιο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ [3]. Τότε, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και η καμπύλη $c(t) = \gamma_v(st)$ είναι επίσης γεωδαισιακή, με πεδίο ορισμού $(-\frac{\varepsilon}{s}, \frac{\varepsilon}{s})$ και $c'(0) = sv$. Παρατηρούμε, επίσης ότι αν $\|\gamma_v'(t)\| = \sqrt{\langle \gamma_v'(t), \gamma_v'(t) \rangle}$, τότε, $\|\gamma_v'(t)\| = \|v\|$ για κάθε t, η ταχύτητα των γεωδαισιακών, δηλαδή είναι σταθερή.

Έστω V είναι το υποσύνολο του T_pM ώστε το 1 να ανήκει στο πεδίο ορισμού των γεωδαισιακών με $\gamma'(0) = v \in V$, ορίζουμε την εκθετική απεικόνιση

$$\exp_p : V \to M$$

$$v \mapsto \gamma_v(1)$$

η οποία είναι διαφορίσιμη, επειδή η λύση της (1.5) παρουσιάζει διαφορίσιμη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες. Για την $\exp_p$ έχουμε το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.2 *Για το διαφορικό της εκθετικής απεικόνισης στο $0 \in T_pM$ έχουμε ότι:*

$$(d \exp_p)_0 = id_{T_pM}$$

όπου ταυτίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο στο 0 του T_pM με τον T_pM. Υπάρχει, επομένως, ανοιχτή περιοχή V του $0 \in T_pM$ ώστε η $\exp_p\big|_V : V \to \exp_p(V)$ να είναι αμφιδιαφόριση.

Η εικόνα μιας τέτοιας περιοχής V μέσω της εκθετικής απεικόνισης ονομάζεται κανονική περιοχή του p, και έχει την ιδιότητα κάθε σημείο $q \in V$ να ενώνεται με το p μέσω μιας μοναδικής γεωδιαισιακής γ_v, ώστε $p = \gamma_v(0)$, $q = \gamma_v(1)$, όπου $v = \exp_p^{-1}(q)$.

Παρατηρούμε ότι για $v \in T_pM$ για το οποίο η $\exp_p$ ορίζεται, η καμπύλη

$$\gamma(t) = \exp_p tv, \quad t \in [0, 1]$$

είναι η γεωδαισιακή με $\gamma'(0) = v$.

Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο της εφαπτόμενης δέσμης TM, ώστε για κάθε $v \in U$, αν $p = \pi(v)$ (όπου π η προβολή της εφαπτόμενης δέσμης) η εκθετική απεικόνιση $\exp_p$ να ορίζεται. Τότε ορίζουμε την διαφορίσιμη απεικόνιση

$$\exp : U \to M$$

ώστε $\exp(v) = \exp_p(v)$.

Ορισμός 2.5 *Μια πολλαπλότητα Riemann θα ονομάζεται πλήρης αν για κάθε p η $\exp_p$ ορίζεται σε ολόκληρο τον εφαπτόμενο χώρο T_pM. Ισοδύναμα, κάθε γεωδαισική ορίζεται γιά όλα τα t.*

Στο εξής, όλες οι πολλαπλότητες υποθέτουμε ότι είναι πλήρεις.

Για την εκθετική απεικόνιση έχουμε το εξής αποτέλεσμα, το οποίο ονομάζεται λήμμα του Gauss.

Λήμμα 2.1 *Αν $\rho(t) = tv$, μια ακτίνα με $v \in T_pM$, και $w \in T_{\rho(t)}T_pM$ ένα διάνυσμα κάθετο στο $\rho'(t)$, τότε το διάνυσμα $(d\exp_p)_{\rho(t)}(w)$ είναι κάθετο στο $(d\exp_p)_{\rho(t)}(\rho'(t))$.*

Σε μια πολλαπλότητα Riemann, ορίζουμε την μετρική

$$d(p,q) = \inf\{L(c)\ c \text{ καμπύλη με } c(0) = p,\ c(1) = q\}$$

Αποδεικνύεται ότι η τοπολογία που εφοδιάζει την M η μετρική αυτή συμπίπτει με την τοπολογία της M ως διαφορική πολλαπλότητα.

Σπουδαίο ρόλο στην γεωμετρία Riemann έχει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.1 *Έστω $B_r(0) \subset T_pM$ μια ανοιχτή μπάλα ακτίνας r στον εφαπτόμενο χώρο πάνω στην οποία η $\exp_p$ είναι εμφύτευση. Τότε, για $v \in B_r(0)$, η γεωδαισιακή $\gamma_v : [0,1] \to M$ είναι η καμπύλη για την οποία*

$$L(\gamma_v) = d(p, \exp_p(v)) = \|v\|$$

Μάλιστα, αν για μια καμπύλη c ισχύει ότι $L(c) = d(c(0), c(1))$ τότε η c είναι γεωδαισιακή κάτω από κατάλληλη αναπαραμέτρηση.

Θεώρημα 2.3 *(Hopf και Rinow) Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann και $p \in M$. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.*

1. *Η $\exp_p$ ορίζεται σε όλο τον T_pM.*
2. *Τα κλειστά και φραγμένα σύνολο της M είναι συμπαγή.*
3. *Η M είναι πλήρης μετρικός χώρος.*
4. *Η M είναι πλήρης πολλαπλότητα Riemann*

Επιπλέον, καθένα από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι για κάθε $q \in M$ υπάρχει μια γεωδαισιακή γ που ενώνει τα p, q ώστε

$$L(\gamma) = d(p,q)$$

2.3 Καμπυλότητα

Ορισμός 2.6 *Ο τανυστής καμπυλότητας R μιας πολλαπλότητας Riemann αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $p \in M$ μια τριγραμμική απεικόνιση*

$$T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$$

Αν $x, y, z \in T_pM$, επεκτείνοντάς τα σε διανυσματικά πεδία $X, Y, Z \in \chi(M)$, ορίζουμε

$$R(x,y)z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Αποδεικνύεται ότι το $R(x,y)z$ είναι ανεξάρτητο των επεκτάσεων των x, y, z. Ισχύουν επίσης η παρακάτω ιδιότητες:

$$R(x,y)z = -R(y,x)z \tag{2.6}$$

$$\langle R(x,y)z, w\rangle = \langle R(z,w)x, y\rangle \tag{2.7}$$

$$R(x,y)z + R(z,x)y + R(y,z)x = 0 \tag{2.8}$$

Η τελευταία ισότητα είναι η πρώτη ταυτότητα του Bianchi.

Ορισμός 2.7 *Έστω $v, w \in T_pM$. Τότε, η sectional καμπυλότητα ως προς τον διδιάστατο υπόχωρο σ του T_pM που παράγεται από τα v, w ορίζεται ως:*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(v,w)w, v\rangle}{\|v \wedge w\|^2}$$

όπου με $\|v \wedge w\|^2$ συμβολίζουμε το τετράγωνο της επιφάνειας του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα v, w, δηλαδή $\|v \wedge w\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$.

2.4 Πεδία Jacobi και συζυγή σημεία

Έστω $c : [0,l] \to M$ μια γεωδαισιακή και $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,l] \to M$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση ώστε για κάθε $-\varepsilon < s < \varepsilon$ η καμπύλη $f_s(t) \equiv f(s,t)$ να είναι γεωδαισιακή, και μάλιστα $f_0 = c$. Έστω επίσης

$$J(t) = \left.\frac{\partial}{\partial s} f(t,s)\right|_{s=0}$$

Αποδεικνύεται ότι το διανυσματικό πεδίο J επί της γεωδαισιακής c ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\nabla_{c'(t)} \nabla_{c'(t)} J(t) = R(c'(t), J(t))c'(t) \tag{2.9}$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση Jacobi και κάθε διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας γεωδαισιακής που ικανοποιεί αυτήν την εξίσωση ονομάζεται πεδίο Jacobi.

Αν $c : [0, l] \to M$ είναι μια γεωδαισιακή και J ένα πεδίο Jacobi κατά μήκος της, τότε από το θεώρημα μοναδικότητας των διαφορικών εξισώσεων έπεται ότι καθορίζεται πλήρως από τα $J(0), J'(0)$.

Είδαμε ότι μια ομαλή μεταβολή γεωδαισιακών, όπως παραπάνω, δημιουργεί ένα πεδίο Jacobi. Ισχύει όμως και το αντίστροφο, ότι κάθε πεδίο Jacobi μπορεί παράγεται από μια τέτοια μεταβολή.

Έστω, $c : [0, l] \to M$ μια γεωδαισιακή με $c(0) = p$, $\|c'(0)\| = 1$ και J ένα πεδίο Jacobi σε αυτή με $J(0) = 0$. Ας θεωρήσουμε τότε το πεδίο

$$V(t) = (d\exp_p)_{tc'(0)}(tJ'(0))$$

Παρατηρούμε ότι, αν $v(s) \in T_pM$ μια καμπύλη με $v(0) = c'(0)$ και $v'(0) = J'(0)$, η μεταβολή

$$f(s, t) = \exp_p tv(s)$$

παράγει το διανυσματικό πεδίο V, και αφού για κάθε s η καμπύλη $t \mapsto f(s, t)$ είναι γεωδαισιακή, έπεται ότι είναι ένα πεδίο Jacobi. Επιπλέον, επειδή $V'(0) = J'(0)$ προκύπτει τελικά ότι $J = V$.

Ορισμός 2.8 *Έστω c μια γεωδαισιακή με $c(0) = p$. Αν για κάποιο t_o υπάρχει πεδίο Jacobi κατά μήκος της c ώστε $J(0) = J(t_o) = 0$ τότε θα λέμε ότι το $q = c(t_o)$ είναι συζυγές του p ως προς την γεωδαισιακή c.*

Μάλιστα, ένα σημείο q είναι συζυγές του p αν και μόνο αν το p είναι συζυγές του q.

Όσον αφορά στα πεδία Jacobi και τα συζυγή σημεία, έχουμε τα εξής.

Πρόταση 2.2 *Έστω $c : [0, l] \to M$ μια γεωδαισιακή, $T(t) = c'(t)$ και έστω J ένα πεδίο Jacobi πάνω στην c. Τότε*

$$\langle T, J \rangle = \langle T(0), J(0) \rangle + \langle T(0), J'(0) \rangle\, t$$

Επομένως, αν $J(0) = J(l) = 0$ έχουμε ότι $\langle J, T \rangle \equiv \langle J', T \rangle \equiv 0$.

Πρόταση 2.3 *Αν τα $c(0)$ και $c(l)$ δεν είναι συζυγή τότε ένα πεδίο Jacobi καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $J(0)$ και $J(l)$.*

Στην περίπτωση που η πολλαπλότητα M έχει σταθερή καμπυλότητα K, έχουμε μια πιο σαφή έκφραση των κάθετων πεδίων Jacobi σε μια γεωδαισιακή. Αν E_i, $n - 1$

παράλληλα πεδία κατά μήκος της c, ώστε τα $E_i(t), T$ να αποτελούν ορθοκανονική βάση του $T_{c(t)}M$, κάθε πεδίο Jacobi κάθετο στην c θα είναι της μορφής

$$\begin{array}{cc}
\sum \left(\alpha_i \sin(\sqrt{K}t) + \beta_i \cos(\sqrt{K}t)\right) E_i(t) & K > 0 \\
\sum(\alpha_i t + \beta_i) E_i(t) & K = 0 \\
\sum \left(\alpha_i \sinh(\sqrt{K}it) + \beta_i \cosh(\sqrt{K}it)\right) E_i(t) & K > 0
\end{array}$$

Παρατηρούμε ότι αν $K \leq 0$ οι γεωδαισιακές δεν έχουν συζυγή σημεία, ενώ αν $K > 0$ τα συζυγή σημεία προκύπτουν για $t = k\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, για κάθε ακέραιο k.

Αν $\gamma : [0, l] \to M$ μια γεωδαισιακή, τότε ένα πεδίο Jacobi J που μηδενίζεται στο $\gamma(0)$, είδαμε ότι εξαρτάται αποκλειστικά από την $J'(0)$. Επομένως, ο χώρος των πεδίων Jacobi με $J(0) = 0$ είναι ένας n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, αν $J'(0) = \gamma'(0)$ θα έχουμε ότι $J(t) = t\gamma'(t)$. Συνεπώς, ο υπόχωρος που περιέχει τα πεδία Jacobi με $J(0) = J(l) = 0$ έχει διάσταση το πολύ $n - 1$. Η διάσταση αυτού του υπόχωρου, αν δεν είναι τετριμμένος, ονομάζεται πολλαπλότητα του συζυγούς σημείου $\gamma(l)$.

Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι ένα σημείο $\gamma(t_o)$ μιας γεωδαισιακής είναι συζυγές του $p = \gamma(0)$, αν και μόνο αν $\ker(d\exp_p)_{t_o\gamma'(0)} \neq \{0\}$, και η πολλαπλότητά του ως συζυγές σημείο είναι ίση με την διάσταση αυτού του πυρήνα.

2.5 Μεταβολή του μήκους

Έστω $c : [\alpha, \beta] \to M$ μια καμπύλη παραμετρισμένη ανάλογα με το μήκος τόξου, και έστω $l = \|c'(t)\|$. Έστω επίσης $f : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση ώστε

$$f|_{[\alpha,\beta]\times\{0\}} = c : [\alpha, \beta] \to M$$

Επιπλέον, ας είναι T, V τα εφαπτόμενα διανύσματα στην M που αντιστοιχούν στην πρώτη και δεύτερη μεταβλητή αντίστοιχα της f. Τότε, αν $c_s = f|_{[\alpha,\beta]\times\{s\}}$ τότε

$$\left.\frac{d}{ds}L(c_s)\right|_{s=0} = \frac{1}{l}\left\{ \langle V(c(t)), T(c(t))\rangle|_a^b - \int_a^b \left\langle V(c(t)), \nabla_{T(c(t))}T(c(t))\right\rangle dt \right\}$$

Μάλιστα, αν η c είναι γεωδαισιακή, έχουμε

$$\left.\frac{d}{ds}L(c_s)\right|_{s=0} = \frac{1}{l}\ \langle V(c(t)), T(c(t))\rangle|_a^b$$

Ο παραπάνω ονομάζεται τύπος της πρώτης μεταβολής του μήκους.

Έστω, τώρα γ μια γεωδαισιακή και $f : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \to M$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση ώστε $f(t,0,0) = \gamma(t)$. Τότε, αν $L(v,w)$ το μήκος της καμπύλης $t \mapsto f(t,v,w)$ έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial^2 L(v,w)}{\partial w \partial v}\right|_{(0,0)} = - \left. \langle \nabla_W V, T \rangle \right|_a^b +$$

$$+ \int_a^b \left(\langle \nabla_T V, \nabla_T W \rangle - \langle R(W,T)T, V \rangle - T \langle V, T \rangle T \langle W, T \rangle \right) dt$$

Επιπλέον, αν η μεταβολή f είναι μέσω γεωδαισιακών, οπότε τα V, W είναι πεδία Jacobi κατά μήκος της c, τότε τα $T\langle V,T\rangle$ και $T\langle W,T\rangle$ είναι σταθερά και αν $\langle V(0,0), T(0,0)\rangle$ ή $= \langle V(1,0), T(1,0)\rangle = 0$, θα έχουμε ότι οι τελευταίοι όροι φεύγουν. Επιπλέον, αν κάποιο από τα V, W μηδενίζεται στα άκρα της γ ή $\nabla_V W = 0$ τότε

$$\left.\frac{\partial^2 L(v,w)}{\partial w \partial v}\right|_{(0,0)} = \int_a^b \left(\langle \nabla_T V, \nabla_T W \rangle + \langle R(W,T)V, T \rangle \right) dt$$

Σε αυτήν την περίπτωση η δεύτερη παράγωγος του μήκους εξαρτάται μόνο από τις τιμές των V, W στην γ. Τότε, το παραπάνω ολοκλήρωμα το ονομάζουμε index form και το συμβολίζουμε με $I(V,W)$. Πρόκειται για μια συμμετρική διγραμμική μορφή στον χώρο των κατά τμήματα διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της γ, κάθετων σε αυτή. Ισχύει επίσης η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4 *Έστω ότι η I είναι ορισμένη στα κατά τμήματα διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία σε μια γεωδαισιακή γ που μηδενίζονται στα άκρα της. Τότε ένα πεδίο V στην γ είναι πεδίο Jacobi αν και μόνο αν*

$$I(V,W) = 0 \quad \textit{για όλα τα } W$$

Ένα πόρισμα της πρότασης αυτής είναι το ακόλουθο

Πόρισμα 2.1 *Αν $\gamma : [a,b] \to M$ μια γεωδαισιακή, η διάσταση του υποχώρου των πεδίων V ώστε $I(V,W) = 0$ για κάθε W είναι ίση με την πολλαπλότητα του $\gamma(b)$ ως συζυγές σημείο(0 αν δεν είναι συζυγές).*

2.6 Focal σημεία

Έστω N μια υποπολλαπλότητα της M. Η κάθετη δέσμη νM είναι το υποσύνολο της TM που ορίζεται ως

$$\nu M = \left\{ v \in TM \text{ ώστε } \langle v, w \rangle \text{ για κάθε } w \in T_{\pi(v)} M \right\}$$

Επίσης, με ν_p θα συμβολίζουμε το νήμα της δέσμης νM στο σημείο $p \in N$. Αν $\exp|_\nu$ ο περιορισμός της $\exp$ στην νM, τότε, γενικεύοντας την έννοια του συζυγούς σημείου, ένα σημείο q, θα το καλούμε focal σημείο της N, αν είναι ιδιάζουσα τιμή της $\exp|_{\nu M}$. Επίσης, θα λέμε ότι το q είναι focal σημείο του $p \in N$ αν έχει κάποια ιδιάζουσα αντίστροφη εικόνα στον ν_p.

Αν $x \in T_pM$ τότε

$$x^{\perp} = \{v \in T_pM \ , \langle v, x \rangle = 0\}$$

Το x ορίζει μια υποπολλαπλότητα N της M ως εξής

$$N = \exp_p(x^{\perp})$$

Τα παρακάτω λήμματα είναι μεγάλης σημασίας και χρησιμοποιούνται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σύγκρισης του Rauch.

Λήμμα 2.2 *Έστω γ μια γεωδαισιακή στην M από το p στο q, τέτοια ώστε να μην υπάρχουν σε αυτή σημεία συζυγή του p. Έστω, επίσης, W ένα κατά τμήματα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο στην γ και V το μοναδικό πεδίο Jacobi με $V(p) = W(p) = 0$ και $V(q) = W(q)$. Τότε, $I(V, V) \leq I(W, W)$ και η ισότητα προκύπτει μόνο αν $V = W$.*

Λήμμα 2.3 *Έστω γ μια γεωδαισιακή στην M από το p στο q. Έστω x το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ στο p και έστω N η υποπολλαπλότητα που ορίζεται από το x. Ας υποθέσουμε ότι η N δεν έχει focal σημεία κατά μήκος της γ, και W ένα κατά τμήματα διαφορίσιμο πεδίο σε αυτή, και V το μοναδικό πεδίο Jacobi με $\nabla_X V(p) = 0$ και $V(q) = W(q)$. Τότε $I(V, V) \leq I(W, W)$ και η ισότητα προκύπτει αν και μόνο αν $V = W$.*

Έφαρμόζοντας το πρώτο από τα παραπάνω λήμματα έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 2.2 *Έστω $\gamma : [0, +\infty) \to M$ μια γεωδαισιακή και $\gamma(t_o)$ συζυγές του $\gamma(0)$ ως προς την γ. Τότε, η $\gamma|_{[0,t]}$ δεν είναι ελαχιστοποιούσα για $t > t_o$.*

2.7 Ισομετρίες.

Έστω M, N δυο πολλαπλότητες Riemann. Μια διαφορίσιμη απεικόνιση

$$f : M \to N$$

θα ονομάζεται τοπική ισομετρία αν για κάθε $p \in M$ και $v, w \in T_pM$

$$\langle v, w \rangle = \langle df(v), df(w) \rangle$$

Αν επιπλέον η f είναι και αμφιδιαφόριση θα λέμε ότι είναι ισομετρία. Αποδεικνύεται ότι η έννοια της ισμομετρίας όπως ορίστηκε, ταυτίζεται με την έννοια της ισομετρίας ανάμεσα σε δυο μετρικούς χώρους.

Επίσης, μια τοπική ισομετρία σέβεται τις συνοχές Riemann των πολλαπλοτήτων, απεικονίζει, δηλαδή παράλληλα πεδιά στην M σε παράλληλα πεδία στην N, και επομένως οι εικόνες γεωδαισιακών της M μέσω της f είναι γεωδαισιακές στην N. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η συνοχή στην N που ορίζεται ως

$$\bar{\nabla}_X Y = df(\nabla_{df^{-1}(X)}(df^{-1}Y))$$

είναι η μοναδική συνοχή Riemann της N.

2.8 Καμπυλότητα Ricci και τα θεωρήματα των Myers και Bonnet

Ορισμός 2.9 *Η καμπυλότητα Ricci είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή σε κάθε εφαπτόμενο χώρο T_pM που ορίζεται ως το ίχνος του γραμμικού μετασχηματισμού $z \mapsto R(z,x)y$. Επομένως,*

$$Ric(x,y) = \sum_i \langle R(e_i,x)y, e_i \rangle$$

όπου η $\{e_i\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του T_pM.

Θεώρημα 2.4 *Έστω M πλήρης πολλαπλότητα Riemann. Αν*

1. *(Myers) για όλα τα μοναδιαία διανύσματα x, $Ric(x,x) \geq (n-1)H > 0$ ή*

2. *(Bonnet) $K_M \geq H$*

τότε κάθε γεωδαισιακή με μήκος $\geq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ έχει συζυγή σημεία. Επομένως,

$$d(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

Πόρισμα 2.3 *Έστω M πλήρης πολλαπλότητα Riemann. Αν υπάρχει σταθερά $H > 0$ ώστε*

$$Ric(x,x) \geq (n-1)H > 0$$

για όλα τα μοναδιαία $x \in TM$, τότε η M είναι συμπαγής και έχει πεπερασμένη θεμελιώδη ομάδα.

2.9 Τα θεωρήματα σύγκρισης του Rauch

Δυο πολύ ισχυρά θεωρήματα της διαφορικής γεωμετρίας, τα οποία μας επιτρέπουν να εξάγουμε γεωμετρικά συμπεράσματα για μια πολλαπλότητα Riemann M η καμπυλότητα της οποίας υπόκειται κάτω από συγκεκριμμένους περιορισμούς είναι τα θεωρήματα τυπου Rauch.

Θεώρημα 2.5 *(Rauch I) Έστω M^n, M_o^{n+k} δυο πολλαπλότητες Riemann, και έστω*

$$\gamma, \gamma_o : [0,l] \to M, M_o$$

δυο γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας, με $\gamma' = T, \gamma_o' = T_o$. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $t \in [0,l]$ και $X \in T_{\gamma(t)}M$, $X_o \in T_{\gamma_o(t)}M_o$ οι καμπυλότητες των επιπεδων σ,σ_o που παράγονται από τα X, T και X_o, T_o αντίστοιχα, ικανοποιούν

$$K(\sigma_o) \geq K(\sigma)$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η γ_o δεν έχει συζυγή σημεία και ότι V, V_o είναι δυο πεδία Jacobi κατά μήκος των γ, γ_o αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα $V(0), V_o(0)$ να είναι εφαπτόμενα στις γ, γ_o και

$$\|V(0)\| = \|V_o(0)\|,\ \langle T, V'(0)\rangle = \langle T_o, V_o'(0)\rangle\,, \quad \|V'(0)\| = \|V_o'(0)\|$$

Τότε για όλα τα $t \in [0,l]$

$$\|V(t)\| \geq \|V_o(t)\|$$

Θεώρημα 2.6 *(Rauch II) Με τον ίδιο συμβολισμό όπως στο προηγούμενο θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι για όλα τα $t \in [0,l]$ για τα επίπεδα σ, σ_o ισχύει $K(\sigma_o) \geq K(\sigma)$. Έστω, επιπλέον, ότι για κανένα t το σημείο $\gamma_o(t)$ δεν είναι focal σημείο της υποπολλαπλότητας N_o που ορίζεται από το T_o, και V, V_o δυο πεδία Jacobi στις γ, γ' ώστε τα $V'(0), V_o'(0)$ να είναι εφαπτόμενα στις γ, γ_o και μάλιστα*

$$\|V'(0)\| = \|V_o'(0)\|,\ \langle T, V(0)\rangle = \langle T_o, V_o(0)\rangle\,,\ \|V(0)\| = \|V_o(0)\|$$

Τότε, για όλα τα $t \in [0,l]$

$$\|V(t)\| \geq \|V_o(t)\|$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεωρήματα για να συγκρίνουμε μια πολλαπλότητα M με $K \leq K_M \leq L$ με τους χώρους σταθερής καμπυλότητας K, L καταλλήγουμε στο εξής πόρισμα.

Πόρισμα 2.4 *Έστω γ μια γεωδαισιακή σε πολλαπλότητα Riemann με*

$$K \leq K_M \leq L$$

Τότε, αν $\gamma(t_o)$ το πρώτο συζυγές σημείο τις γ, αν υπάρχει, θα έχουμε ότι

$$\frac{\pi}{\sqrt{L}} \leq t_o \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$$

Επίσης, σημαντική εφαρμογή των θεωρημάτων αυτών είναι τα ακόλουθα πορίσματα, τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα αν μας ενδιαφέρει να έχουν κάποια εκτίμηση του μήκους καμπύλων στην M συγκρίνοντας με αντίστοιχες καμπύλες σε ποιο γνωστές πολλαπλότητες.

Πόρισμα 2.5 *Έστω M, M_o δυο πολλαπλότητες Riemann με $\dim M_o \geq \dim M$, και έστω $p, p_o \in M, M_o$. Έστω $K_{M_o} \geq K_M$. Έστω επίσης $r > 0$ τέτοιο ώστε η $\exp_p\big|_{B_r(0)}$ να είναι εμφύτευση και η $\exp_{p_o}\big|_{B_r(0)}$ να είναι τοπική αμφιδιαφόριση, και $I : T_pM \to T_{p_o}M_o$ μια γραμμική εμφύτευση που σέβεται τα εσωτερικά γινόμενα. Τότε, για κάθε καμπύλη*

$$c : [0,1] \to \exp_p(B_r(0))$$

έχουμε ότι

$$L(c) \geq L(\exp_{p_o} \circ I \circ \exp_p^{-1}(c)) = L(c_o(t))$$

Πόρισμα 2.6 *Έστω γ, γ_o γεωδαισιακές στις M, M_o παραμετρισμένες στο διάστημα $[0, l]$, με εφαπτόμενα διανύσματα T, T_o. Έστω επίσης E, E_o παράλληλα, μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των γ, γ_o κάθετα στα T, T_o, και $c : [0, l] \to M$ μια καμπύλη με*

$$c(t) = \exp(f(t)E(t))$$

όπου $f : [0, l] \to \Re$ κατάλληλη ομαλή συνάρτηση και έστω $c_o : [0, l] \to M_o$ η καμπύλή που ορίζεται ως

$$c_o(t) = \exp(f(t)E_o(t))$$

Ας υποθέσουμε ότι $K_{M_o} \geq K_M$ και ότι για κάθε t η γεωδαισιακή $\eta_o : [0,1] \to M_o$ που ορίζεται ως

$$\eta_o(s) = \exp(sf(t)E_o(t))$$

δεν περιέχει focal σημεία της υποπολλαπλότητας που ορίζει το $\eta'_s(0)$. Τότε,

$$L(c) \geq L(c_o)$$

2.10 Το θεώρημα των Cartan-Hadamard

Λήμμα 2.4 *Έστω $\phi : M \to N$ μια τοπική ισομετρία ανάμεσα σε δυο πολλαπλότητες Riemann, και ότι η M είναι πλήρης. Τότε, η ϕ είναι απεικόνιση επικάλυψης.*

Θεώρημα 2.7 *Έστω M^n μια πλήρης πολλαπλότητα Riemann με $K_M \leq 0$. Τότε για κάθε $p \in M$ η $\exp_p : T_pM \to M$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Συνεπώς, ο καθολικός χώρος επικάλυψης της M είναι αμφιδιαφορικός με τον $\Re^n$, οπότε και οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_i(M)$ είναι τετριμένες για $i > 1$.*

Πόρισμα 2.7 *Έστω M^n πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με μη θετική καμπυλότητα. Τότε η M^n είναι αμφιδιαφορική με τον $\Re^n$.*

2.11 Το θεώρημα των Cartan-Ambrose-Hicks

Γενικά γνωρίζουμε ότι αν δυο πολλαπλότητες Riemann συνδέονται μέσω μιας ισομετρίας, τότε αυτή η ισομετρία θα σέβεται και την καμπυλότητά τους. Το θεώρημα αυτής της ενότητας απαντά στο αντίστοφο ερώτημα, κατα πόσον, δηλαδή, δυο πολλαπλότητες $M^n, \bar{M}^n$ με κατάλληλα συσχετισμένους τανυστές καμπυλότητας είναι ισομετρικές. Πριν την διατύπωση του ολικού θεωρήματος, το ακόλουθο, τοπικό αποτέλεσμα είναι απαραίτητο.

Λήμμα 2.5 *Έστω $p \in M$, $\bar{p} \in \bar{M}$ και $I : T_pM \to T_{\bar{p}}\bar{M}$ μια ισομετρία. Έστω επίσης $r > 0$ τέτοιο ώστε οι $B_r(p)$ και $B_r(\bar{p})$ να είναι κανονικές περιοχές των p και $\bar{p}$. Ας ορίσουμε την αμφιδιαφόριση*

$$\phi : B_r(p) \to B_r(\bar{p}) \quad \mu\epsilon$$

$$\phi = \exp_{\bar{p}} \circ I \circ \exp_p^{-1}$$

Επίσης, αν γ,$\bar{\gamma} = \phi(\gamma)$ δυο γεωδαισιακές από τα $p, \bar{p}$ αντίστοιχα, ας είναι

$$I_\gamma = P_{\bar{\gamma}} \circ I \circ P_{-\gamma}$$

όπου $P_\gamma, P_{\bar{\gamma}}$ είναι οι αντίστοιχες παράλληλες μετατοπίσεις. Έστω επίσης $R, \bar{R}$ οι καμπυλότητες στην $M, \bar{M}$ αντίστοιχα.

Τότε, αν για όλες τις γεωδαισιακές από το p ισχύει ότι

$$I_\gamma(R(x,y)z) = \bar{R}(I_\gamma(x), I_\gamma(y))I_\gamma(z)$$

η ϕ είναι ισομετρία, και μάλιστα $d\phi = I_\gamma$

Ορισμός 2.10 *Μια σπασμένη γεωδαισιακή είναι μια συνεχής καμπύλη $\gamma : [0,l] \to M$ για την οποία υπάρχει διαμέριση $0 < t_o < t_1 < \ldots < t_n = l$ ώστε η $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ να είναι ομαλή γεωδαισιακή.*

Έστω λοιπόν $M, \bar{M}, I$ όπως στο προηγούμενο λήμμα, και γ μια σπασμένη γεωδαισιακή από το $p \in M$. Ας ορίσουμε

$$\gamma_i = \gamma|_{[0,t_i]}$$

και $v_i \in T_{\gamma(t_i)}$ τέτοιο ώστε

$$\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}(t) = \exp_{\gamma(t_i)}(t - t_i)v_i$$

Επεκτείνοντας, τώρα την ιδέα του προηγούμενου λήμματος θα ορίσουμε μια αντιστοίχιση ανάμεσα σε σπασμένες γεωδαισιακές από τα $p, \bar{p}$. Έστω

$$\bar{\gamma}_1(t) = \exp_{\gamma(0)} tI(v_0)$$

και ας ορίσουμε

$$\gamma_{i+1} = \begin{cases} \bar{\gamma}_i(t) & 0 \le t \le t_i \\ \exp_{\bar{\gamma}_i(t_i)} t\,(P_{\bar{\gamma}_i} \circ I \circ P_{-\gamma_i}(v_i)) & t_i \le t \le t_{i+1} \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν το εξής ολικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.8 *(Cartan-Ambrose-Hicks) Έστω $M^n, \bar{M}^n$ πλήρεις πολλαπλότητες Riemann, με την M^n απλά συνεκτική και $I : T_pM \to T_{\bar{p}}\bar{M}$ μια ισομετρία. Έστω ότι για όλες τις σπασμένες γεωδαισιακές γ*

$$I_\gamma(R(x,y)z) = \bar{R}(I_\gamma(x), I_\gamma(y))I_\gamma(z)$$

Τότε, για όλες τις σπασμένες γεωδαισιακές γ^0, γ^1 για τις οποίες $\gamma^0(l_0) = \gamma^1(l_1)$ έχουμε ότι

$$\bar{\gamma}^0(l_0) = \bar{\gamma}^1(l_1)$$

Κατά συνέπεια, ορίζεται μια απεικόνιση

$$\Phi : M \to \bar{M}$$

με $\gamma(l) \mapsto \bar{\gamma}(\bar{l})$.
Επιπλέον, η Φ είναι τοπική ισομετρία και άρα απεικόνιση επικάλυψης.

2.12 Χώροι σταθερής καμπυλότητας

Έστω M μια πολλαπλότητα Riemann τέτοια ώστε για κάποιο K, $K(\sigma) = K$, για κάθε $p \in M$ και κάθε διδιάστατο υπόχωρο σ του T_pM. Τότε θα λέμε ότι η M έχει σταθερή καμπυλότητα.

Υπολογίζοντας τον τανυστή καμπυλότητας σε μια τέτοια πολλαπλότητα, βλέπουμε ότι

$$R(x,y)z = K\left(\langle z,y\rangle x - \langle z,x\rangle y\right)$$

Τελικά, εφαρμόζοντας το θεώρημα (1.7) καταλήγουμε στο εξής θεώρημα, το οποίο ουσιαστικά συνεπάγεται ότι απλά συνεκτικές πλήρεις πολλαπλότητες ίδιας, σταθερής, καμπυλότητας είναι ισομετρικές.

Θεώρημα 2.9 *Έστω M^n,$\bar{M}^n$ δυο πλήρεις, απλά συνεκτικές πολλαπλότητες Riemann με σταθερή καμπυλότητα K. Τότε, οι $M^n, \bar{M}^n$ είναι ισομετρικές.*

Μάλιστα, δοσμένης μιας ισομετρίας $I : T_pM \to T_{\bar{p}}\bar{M}$ υπάρχει πάντα μια ισομετρία $\Phi : M \to \bar{M}$ τέτοια ώστε $\Phi(p) = \bar{p}$ και $d\Phi_p = I$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι απλά συνεκτικές πολλαπλότητες σταθερής καμπυλότητας, ανάλογα με το πρόσημο της καμπυλότητας, μετά από πολλαπλάσιασμό της μετρικής με κατάλληλη σταθερά, ουσιαστικά είναι οι εξής τρείς.

1. $K \equiv 0$ και η M είναι ισομετρική με τον $\Re^n$ με την συνηθισμένη μετρική.

2. $K = 1$ και η M είναι ισομετρική με την σφαίρα S_1^n ακτίνας 1 και καμπυλότητας 1 του $\Re^{n+1}$.

3. $K=-1$ τότε η M είναι ισομετρική με τον n-διάστατο υπερβολικό χώρο H^n καμπυλότητας -1.

   Ο H^n ορίζεται ως το σύνολο

$$H^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_n > 0\}$$

   εφοδιασμένο με την μετρική

$$g_{ij}(x_1, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

2.13 Θεωρία Morse

Ορισμός 2.11 *Έστω $f : M \to \Re$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση και $p \in M$. Θα λέμε ότι το p είναι κρίσιμο σημείο της M αν $(df)_p \equiv 0$. Επίσης, θα λέμε ότι ένα $c \in \Re$ είναι κρίσιμη τιμή της f αν υπάρχει κάποιο κρίσιμο σημείο $p \in M$ ώστε $f(p) = c$.*

Λήμμα 2.6 *Αν p ένα κρίσιμο σημείο της $f : M \to \Re$, και X, Y διανυσματικά πεδία της M, τότε το $X(Y(f))(p)$ εξαρτάται μόνο από τα $X(p), Y(p)$. Επιπλέον, η απεικόνιση*

$$(X(p), Y(p)) \mapsto X(Y(f))(p)$$

είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή του T_pM.

Απόδειξη: Προκύπτει από το γεγονός ότι

$$X(Y(f))(p) - Y(X(f))(p) = (df)_p([X, Y]_p) = 0$$

ενώ τα $X(Y(f))(p), Y(X(f))(p)$ εξαρτώνται μόνο από τα $X(p), Y(p)$ αντίστοιχα. $\square$

Ορισμός 2.12 *Έστω p ένα κρίσιμο σημείο της f. Η απεικόνιση*

$$H_pf : T_pM \times T_pM :\to \Re$$

που ορίζεται όπως στο προηγούμενο λήμμα, ονομάζεται η εσσιανή της f στο p.

Αν η H_pf είναι μη-εκφυλισμένη διγραμμική μορφή, δηλαδή η απεικόνιση

$$x \mapsto H_pf(x, .)$$

είναι ισομορφισμός του T_pM στον T_pM^*, θα λέμε ότι το p είναι μη-εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο.

Η διάσταση λ του υποχώρου με την μεγαλύτερη διάσταση στον οποίο η H_pf είναι αρνητικά ορισμένη ονομάζεται δείκτης του p.

Το παρακάτω λήμμα, που ονομάζεται λήμμα του Morse, είναι κεντρικό στην θεωρία Morse και δίνει μια κανονική μορφή της f γύρω από κάποιο μη-εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο της.

Λήμμα 2.7 *Έστω p ένα μη-εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο της $f : M \to \Re$. Τότε, υπάρχει χάρτης $\phi : U \to M$ γύρω από το p ώστε*

$$f \circ \phi(x) = f(p) + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-\lambda}^2 - y_1^2 - \ldots - y_\lambda^2$$

όπου $x = (x_1, \ldots, x_{n-\lambda}, y_1, \ldots, y_\lambda)$.

Άμεσο πόρισμα του λήμματος αυτού είναι το εξής.

Πόρισμα 2.8 *Τα μη εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία είναι μεμονωμένα.*

Αν M μια πολλαπλότητα ας ορίσουμε

$$M^a = \{p \in M \ : \ f(p) \leq a\}$$

Τότε, η M^a είναι μια πολλαπλότητα με σύνορο $f^{-1}(a)$.

Θεώρημα 2.10 *Αν $f^{-1}[a, b]$ είναι συμπαγές, και δεν περιέχει κρίσιμα σημεία της f, τότε το M^a είναι αμφιδιαφορικό με το M^b. Μάλιστα το M^a είναι συστολή παραμόρφωσης του M^b που είναι αμφιδιαφόριση σε κάθε στάδιό της. Επομένως, η εμφύτευση*

$$M^a \hookrightarrow M^b$$

είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

Θεώρημα 2.11 *Έστω ότι η $f : M \to \Re$ έχει ένα μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο p με δείκτη λ, και $f(p) = c$. Έστω επίσης ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ να είναι συμπαγές, και να μην περιέχει άλλα κρίσιμα σημεία εκτός από το p. Τότε, το $M^{c+\varepsilon}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με το $M^{c-\varepsilon}$ με ένα κελί διάστασης λ τοποθετημένο στο σύνορο.*

Θεώρημα 2.12 *Αν η $f : M \to \Re$ έχει μόνο μη εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία, και για όλα τα $a \in \Re$ το σύνολο M^a είναι συμπαγές, τότε η M είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με ένα CW σύμπλεγμα, με ένα κελί διάστασης λ για κάθε κρίσιμο σημείο δείκτη λ.*

Το επόμενο λήμμα, θα αποδειχτεί εξαιρετικά χρήσιμο στο κεφάλαιο 3, όπου θα αποδείξουμε το θεώρημα του Klingenberg, σχετικά με την εκτίμηση της injectivity radius που χρειάζεται στην απόδειξη του θεωρήματος της σφαίρας.

Λήμμα 2.8 *Έστω $f : M \to \Re$ διαφορίσιμη απεικόνιση ώστε για κάθε $a \in \Re$ το σύνολο M^a να είναι συμπαγές, τα κρίσιμα σημεία της οποίας μπορεί να είναι και εκφυλισμένα. Έστω $p, q \in M$ και μια ομαλή καμπύλη $\gamma : [0,1] \to M$ από το p στο q. Τότε, αν*

$$\alpha = \max\{f(p), f(q)\}$$

δοθέντος $\varepsilon > 0$, η γ είναι ομοτοπική, με τα άκρα σταθεροποιημένα, με μια καμπύλη $\bar{\gamma}$ τέτοια ώστε

$$f|_{\bar{\gamma}} \leq \max(\alpha, c) + \varepsilon$$

όπου c η μεγαλύτερη κρίσιμη τιμή με δείκτη μηδέν ή ένα.

Απόδειξη: Έστω ότι η f δεν έχει εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία, και ας θέσουμε

$$b = \max\{f|_{\gamma}\}$$

Αν $p_1, \ldots, p_k$ τα κρίσιμα σημεία της f στο $M^b - M^\alpha$, και c_i οι αντίστοιχες κρίσιμες τιμές, τότε, εφόσον τα κρίσιμα σημεία είναι μεμονωμένα, είναι δυνατόν να μεταβληθεί η f, χωρίς να αλλάξει το σύνολο των κρίσιμων σημείων της, έτσι ώστε

$$\alpha < c_k < \ldots < c_2 < c_1 \leq b$$

Αν $b = c_1$, τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Από το θεώρημα (1.9), αν $b > c_1$, για $\varepsilon > 0$ μικρό, υπάρχει μια συστολή παραμόρφωσης $h_s^1 : M^b \to M^b$, του M^b στο $M^{c_1+\varepsilon}$. Ας θέσουμε $\gamma_1 = h_1^1 \circ \gamma$.

Αν το p_1 έχει δείκτη μηδέν, τότε είναι ισχυρό τοπικό ελάχιστο. Επιπλέον, αν το ε είναι αρκετά μικρό, το p_1 θα περιέχεται σε μια συνεκτική συνιστώσα του $M^{c_1+\varepsilon}$, H τέτοια ώστε $f(H) \subset [c_1, c_1+\varepsilon]$. Επομένως, είτε $\gamma_1 \subset H$, είτε, $\gamma_1 \cap H = \emptyset$. Η περίπτωση $\gamma_1 \subset H$ είναι αδύνατη επειδή $c_1 > a$. Συνεπώς, $\gamma_1 \cap H = \emptyset$, οπότε, σε αυτήν την περίπτωση το p_1 δεν δημιουργεί πρόβλημα. Αν το p_1 έχει δείκτη ένα, τότε η γ_1 είναι η ζητούμενη καμπύλη.

Μπορούμε, λοιπόν να υποθέσουμε ότι το p_1 έχει δείκτη μεγαλύτερο του 2. Τότε, αν H μια περιοχή του p_1, όπου, σύμφωνα με το λήμμα του Morse, η f να έχει την μορφή

$$f(x) = c_1 + x_1^2 + \ldots + x_{n-\lambda}^2 - y_1^2 - \ldots - y_\lambda^2$$

για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, το $M^{c_1-\varepsilon} \cup H$ είναι συνεκτικό, και χρησιμοποιώντας την διαφορική ροή του $-\mathrm{grad} f$ κατασκευάζουμε μια συστολή παραμόρφωσης h_s^2 του $M^{c_1+\varepsilon}$ στο $M^{c_1-\varepsilon} \cup H$. θετωντας $\gamma_2 = h_1^2 \circ \gamma_1$ έχουμε μια καμπύλη στο $M^{c_1-\varepsilon} \cup H$. Ας παρατηρήσουμε ότι οι δυο συστολές παραμόρφωσης που χρησιμοποιήσαμε, επειδή δεν μεταβάλουν το M^a, διατηρούν τα άκρα των καμπύλων σταθερά.

Έστω, τώρα, $L \subset H$ εκείνο το σύνολο όπου $y_1 = \ldots = y_\lambda = 0$. Επειδή

$$\dim[0,1] + \dim L = 1 + n - \lambda < \dim M = n$$

έπεται ότι η γ_2 μπορεί να μεταβληθεί έτσι ώστε να μην τέμνει το L, χωρίς να αλλάξουν τα άκρα της. Επειδή, η δράση του $-\mathrm{grad} f$, οδηγεί σημεία που δεν ανήκουν στο L μακριά από το p_1, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συστολή παραμόρφωσης h_s^3 του $M^{c_1-\varepsilon} \cup (H-L)$ στο $M^{c_1-\varepsilon}$, οπότε, η καμπύλη $\gamma_3 = h_1^3 \circ \gamma_2$ βρίσκεται στο $M^{c_1-\varepsilon}$ και είναι ομοτοπική με την γ.

Με επαναλαμβανώμενη εφαρμογή των παραπάνω βημάτων και για τα υπόλοιπα κρίσιμα σημεία, καταλήγουμε σε μια καμπύλη $\bar{\gamma} \subset M^{c_k-\varepsilon}$. Επειδή το σύνολο $M^{c_k-\varepsilon} - M^a$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία, μπορούμε να παραμορφώσουμε την $\bar{\gamma}$ στο M^a, και αυτό αρκεί για την απόδειξη του λήμματος σε αυτήν την περίπτωση.

Αν η f έχει εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία, μπορεί να προσεγγιστεί από μια $\tilde{f}$ χωρίς εκφυλισμένα κρίσιμα σημεία. Επειδή, ο δείκτης σαν συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής, το λήμμα αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το προηγούμενο επιχείρημα στην $\tilde{f}$. $\square$

Στο κεφάλαιο 3, θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία Morse στον χώρο των καμπύλων μιας πολλαπλότητας Riemann, ο οποίος είναι άπειρης διάσταση πολλαπλότητα, και γιαυτό ας δούμε πως μπορούν να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα που μόλις είδαμε σε αυτήν την περίπτωση.

Ας θεωρήσουμε τον σύνολο $\Omega(p,q)$, των συνεχών, κατά τμήματα διαφορίσιμων καμπύλων $\gamma : [0,1] \to M$ της M από το p στο q. Για κάθε καμπύλη γ στην M, δηλαδή, υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ του διαστήματος $[0,1]$ ώστε για κάθε i, η $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ να είναι διαφορίσιμη.

Στον χώρο $\Omega(p,q)$ ορίζουμε την εξής μετρική.

$$d(\gamma,\gamma_o) = \max_{0\le t\le 1}\left\{ d(\gamma(t),\gamma_o(t)) + \left[\int_0^1 \left(\frac{dL}{dt} - \frac{dL_o}{dt}\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

όπου $\gamma, \gamma_o \in \Omega(p,q)$ και $L(t)$, $L_o(t)$ τα μήκη των καμπυλών από το $\gamma(0)$ στο $\gamma(t)$(και αντίστοιχα για την γ_o).

Η συνάρτηση της ενέργειας

$$E(\gamma) = \int_0^1 \left(\frac{dL}{dt}\right)^2 dt$$

είναι συνεχής συνάρτηση από το $\Omega(p,q)$ στο $\Re$ ως προς αυτή την μετρική. Αν το $\|T\|$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της γ τότε

$$E(\gamma) = \int_0^1 \|T\|^2 dt$$

Επίσης, η ανισότητα Schwarz συνεπάγεται ότι

$$(L(\gamma))^2 = \left(\int_a^b \|T\| dt\right)^2 \le \int_a^b \|T\|^2 dt \int_a^b 1^2 = E(\gamma)(b-a)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο αν η $\|T\|$ είναι σταθερή.

Θα μελετήσουμε την τοπολογία του $\Omega(p,q)$ μελετώντας τα κρίσιμα σημεία της E, όμως επειδή ο $\Omega(p,q)$ δεν είναι πολλαπλότητα πεπερασμένης διάστασης, θα χρειαστεί να την προσεγγίσουμε με μια που είναι.

Έστω $\Omega(p,q)^c = \{\gamma \in \Omega(p,q) : \ E(\gamma) \leq c\}$. Θα κατασκευάσουμε έναν υπόχωρο $\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c$ στον οποίο συστέλεται παραμορφωτικά, και είναι πολλαπλότητα πεπερασμένης διάστασης.

Δοθέντος c, διαλέγουμε ένα θετικό αριθμό $r_c(M)$ ώστε για κάθε σημείο m με $d(p,m) \leq \sqrt{c}$, η $\exp_m$ να είναι αμφιδιαφόριση αν περιοριστεί στην μπάλα $B_{r_c(M)}(0) \subset T_mM$. Έστω, τώρα, μια διαμέριση του $[0,1]$ ώστε

$$c^{-1}(r_c(M))^2 \geq t_{i+1} - t_i$$

Ας ορίσουμε το σύνολο $\Omega(t_0,\ldots,t_k)$ ως το σύνολο των καμπύλων γ του $\Omega(p,q)$ που η $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ είναι γεωδαισιακή. Ορίζουμε

$$\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c = \Omega(t_0,\ldots,t_k) \cap \Omega(p,q)^c$$

Από τον τρόπο που επιλέχθηκαν τα t_i και το $r_c(M)$ έπεται ότι κάθε σπασμένη γεωδαισιακή γ στο $\Omega(t_0,\ldots,t_k)$, καθορίζεται πλήρως από τα σημεία $\{\gamma(t_i)\}$. Συνεπώς η απεικόνιση $\gamma \mapsto (\gamma(t_1),\ldots,\gamma(t_{k-1}))$ ορίζει μια 1-1 εμφύτευση του

$$\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c \to M \times \ldots \times M$$

και η εικόνα αυτής της απεικόνισης θα είναι μια υποπολλαπλότητα της $M \times \ldots \times M$ με σύνορο, της οποίας το εσωτερικό είναι η εικόνα του συνόλου

$$\{\gamma \in \Omega(t_0,\ldots,t_k) : \ E(\gamma) < c\}$$

Με αυτό τον τρόπο του σύνολο $\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c$ αποκτά δομή πολλαπλότητας, και η $E|_{\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c}$ είναι ομαλή συνάρτηση.

Θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια μια συστολή παραμόρφωσης του $\Omega(p,q)^c$ στο $\Omega(t_o,\ldots,t_k)^c$. Έστω $\gamma \in \Omega(p,q)^c$. Για κάθε $s \in [0,1]$ και i, ορίζουμε την καμπύλη σ_s^i, να είναι η μοναδική ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\gamma(t_i)$ στο $\gamma(t_i + s(t_{i+1} - t_i))$. Επίσης, έστω h_s η καμπύλη με

$$h_s(t) = \begin{cases} \sigma_s^i(t), & t_i \leq t \leq t_i + s(t_{i+1} - t_i) \\ \\ \gamma(t), & t_i + s(t_{i+1} - t_i) \leq t \leq t_{i+1} \end{cases}$$

και $\gamma_s^i = \gamma|_{[t_i, t_i + s(t_{i+1} - t_i)]}$.

Παρατηρούμε τότε ότι

$$E(\gamma_s^i)s(t_{i+1}-t_i) \geq (L(\gamma_s^i))^2 \geq (L(\sigma_s^i))^2 = E(\sigma_s^i)s(t_{i+1}-t_i)$$

και επομενως, $E(h_s) \leq c$, δηλαδή $h_s \in \Omega(t_o,\ldots,t_k)$. Τελικά, η h_s είναι η ζητούμενη συτολή παραμόρφωσης.

Έστω $\{c_s\} \subset \Omega(p,q)$ μια μονοπαραμετρική ομαλή οικογένεια καμπυλών. Τότε, υπολογίζοντας την παράγωγο της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(E(c_s))\Big|_{s=0} = -\int_0^1 \langle W, \nabla_T T\rangle\, dt + \sum_i \Delta_{\tau_i}\langle W, T\rangle$$

όπου $T = \frac{\partial}{\partial t}(c_s(t))\big|_{s=0}$, $\quad W = \frac{\partial}{\partial s}(c_s(t))\big|_{s=0}$, και

$$\Delta_{\tau_i}\langle W,T\rangle = \lim_{t\to\tau_i^+}\langle W,T\rangle - \lim_{t\to\tau_i^-}\langle W,T\rangle$$

με $\{\tau_i\}$ να είναι τα σημεία όπου η c_0 δεν είναι διαφορίσιμη.

Παρατηρούμε ότι $\frac{d}{ds}(E(c_s))\big|_{s=0} = 0$, για κάθε μεταβολή της c_0, δηλαδή η c_0 είναι κρίσιμο σημείο της E, αν και μόνο αν η c_0 είναι μια ομαλή γεωδαισιακή. Έχουμε λοιπόν ότι τα κρίσιμα σημεία της $E|_{\Omega(t_0,\ldots,t_k)^c}$ είναι ακριβώς οι ομαλές γεωδαισιακές.

Έστω $\gamma \in \Omega(p,q)$ και $c_{(u,v)}(t)$ μια διπαραμετρική μεταβολή της γ, με $c_{(0,0)} = \gamma$. Τότε, αν V, W είναι τα πεδία κατά μήκος της γ που δημιουργεί η μεταβολή τότε έχουμε

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} = \int_0^1 \langle \nabla_T V, \nabla_T W\rangle + \langle R(V,T)W, T\rangle = I(V,W)$$

Μάλιστα, αν θεωρήσουμε την $E|_{\Omega(t_o,\ldots,t_k)^c}$, τότε τα πεδιά V, W είναι κατά τμήματα διαφορίσιμα πεδία Jacobi , αφού τότε η μεταβολές γίνονται μέσω σπασμένων γεωδαισιακών. Συνεπώς, ο δείκτης ενός κρίσιμου σημείου της $E|_{\Omega(t_o,\ldots,t_k)^c}$ είναι ίσος με τον δείκτη της $I(\ ,\ )$ στα σπασμένα πεδία Jacobi . Αποδεικνύεται ότι ο δείκτης αυτός είναι ίσος με τον δείκτη της $I(\ ,\ )$ ως προς όλα τα διανυσματικά πεδίο που μηδενίζονται στα p, q.

Η πρόταση (1.4) και το πορισμα (1.1) ουσιαστικά λένε ότι η γ είναι εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο του E αν και μόνο αν το q είναι συζυγές του p κατά μήκος της γ.

Θεώρημα 2.13 *Αν το p δεν είναι συζυγές του p ως προς καμιά γεωδαισιακή τότε ο $\Omega(p,q)$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα CW σύμπλεγμα με ένα κελί διάστασης λ για κάθε γεωδαισιακή γ από το p στο q που περιέχει λ σημεία συζυγή του p.*

Μια πρόταση που θα μας χρειαστεί στο κεφάλαιο 3 είναι η εξής.

Πρόταση 2.5 *Αν M και M_o είναι πολλαπλότητες με γεωδαισιακές γ, γ_o ίσου μήκους, και αν για κάθε t η ελάχιστη καμπυλότητα της M στο $\gamma(t)$ είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη καμπυλότητα της M_o στο $\gamma_o(t)$, τότε ο δείκτης της γ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον δείκτη της γ_o*

Απόδειξη: Αν $p = \gamma(0)$ και $\bar{p} = \gamma_o(0)$, έστω $I : T_{\bar{p}}M_o \to T_pM$ μια γραμμική ισομετρία, ώστε $I(\gamma_o'(0)) = \gamma'(0)$ και έστω

$$P_t, \bar{P}_t : T_pM, T_{\bar{p}}M_o \to T_{\gamma(t)}M, T_{\gamma_o(t)}M_o$$

οι παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος των γ, γ_o αντίστοιχα.

Έστω $\bar{W}$ ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ_o. Ας ορίσουμε στην γ το διανυσματικό πεδίο W που δίνεται από

$$W(t) = P_t \circ I \circ \bar{P}_t^{-1}(\bar{W}(t))$$

επειδή αυτα τα δύο πεδία αντιστοιχούνται μέσω ισομετριών, θα έχουμε ότι

$$\langle W', W' \rangle = \left\langle \bar{W}', \bar{W}' \right\rangle, \quad \|W(t)\| = \|\bar{W}(t)\|, \quad \langle W, \gamma' \rangle = \left\langle \bar{W}, \gamma_o' \right\rangle$$

και λόγω της υπόθεσης για την καμπυλότητα της M και M_o πάνω στις γ και γ_o αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι

$$I(W, W) \leq I(\bar{W}, \bar{W})$$

Επομένως, αν $I(\bar{W}, \bar{W}) < 0$ θα έχουμε και ότι $I(W, W) < 0$, και επειδή μέσω αυτής της αντιστοίχισης γραμμικά ανεξάρτητα πεδία στην γ_o στέλνονται σε γραμμικά ανεξάρτητα πεδία της γ, η πρόταση έχει αποδειχθεί. $\square$

Έστω $\chi_0(\gamma)$ να είναι ο χώρος των συνεχών, κατά τμήματα διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων πάνω σε μια γεωδαισιακή $\gamma : [0, 1] \to M$ από το p στο q, τα οποία μηδενίζονται στα p, q.

Θεώρημα 2.14 *Ο υπόχωρος του $\chi_0(\gamma)$ στον οποίο η I είναι αρνητικά ορισμένη είναι πεπερασμένης διάστασης, η οποία είναι ίση με τον αριθμό των συζυγών σημείων του p στο $\gamma([0, 1))$, λαμβάνοντας υπ'όψιν την πολλαπλότητά τους.*

Ο πυρήνας της I είναι τετριμμένος εκτός και αν το q είναι συζυγές του p, και η διάστασή του είναι ίση με την πολλαπλότητα του q ως συζυγές σημείο.

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα του Toponogov

Ορισμός 3.1 *Ένα γεωδαισιακό τρίγωνο σε μια πολλαπλότητα Riemann M είναι μια τριάδα $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ από γεωδαισιακά τμήματα παραμετρησμένα ως προς το μήκος τόξου με μήκη l_1, l_2, l_3 τέτοια ώστε $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$ και $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$.*
Ορίζουμε $\alpha_i = \sphericalangle(-\gamma\acute{}_{i+1}(l_{i+1}), \gamma\acute{}_{i+2}(0))$ την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $-\gamma'_{i+1}(l_{i+1})$ και $\gamma'_{i+2}(0)$ με $0 \leq \alpha_i \leq \pi$ (Οι δείκτες είναι modulo 3)

Στο εξής ένα γεωδαισιακό τρίγωνο θα καθορίζεται από τις πλευρές του και θα γράφουμε $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

Ορισμός 3.2 *Έστω M πολλαπλότητα Riemann και γ_1, γ_2 γεωδαισιακά τμήματα τέτοια ώστε $\gamma_1(l_1) = \gamma_2(0)$ και έστω $\alpha = \sphericalangle(-\gamma_1'(l_1), \gamma_2'(0))$ Τότε, την τριάδα $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ θα την καλούμε γωνία.*

Θεώρημα 3.1 *Έστω M μια πλήρης πολλαπλότητα Riemann με $K_M \geq H$*

A. Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ένα γεωδαισιακό τρίγωνο στην M. Υποθέτουμε ότι οι γ_1, γ_3 είναι ελαχιστοποιούσες και στην περίπτωση που $H > 0$ ότι $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$
Με το σύμβολο M^H θα συμβολίζουμε την απλά συνεκτική πολλαπλότητα διάστασης 2 και σταθερής καμπηλότητας H.
Τότε, υπάρχει τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ στην M^H τέτοιο ώστε $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i})$, $\bar{\alpha_1} \leq \alpha_1$ και $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$.
Αν επιπλέον $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ το τρίγωνο στην M^H είναι μονοσήμαντα καθορισμένο.

B. Έστω μια γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ στην M, με την γεωδαισιακή γ_1 να είναι ελαχιστοποιούσες και αν $H > 0$ να ισχύει ότι $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.
Έστω επίσης γεωδαισιακά τμήματα $\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}$ στην M^H τέτοια ώστε $\bar{\gamma_1}(l_1) = \bar{\gamma_2}(0)$, $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i})$ και $\sphericalangle(-\bar{\gamma_1}'(l_i), \bar{\gamma_2}'(0)) = \alpha$
Τότε $d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε 11 βήματα.

(1) Έστω $\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2} \subset M^{H-\varepsilon}$, με $\bar{\gamma_1}(l_1) = \bar{\gamma_2}(0)$, $\sphericalangle(-\bar{\gamma_1}'(l_1), \bar{\gamma_2}'(0)) = \alpha$ και $L(\bar{\gamma_i}) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.Τότε η συνάρτηση $f(a) = d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$, όπου $0 \leq \alpha \leq \pi$ είναι γνησίως άυξουσα, με $f(0) = |l_1 - l_2|$ και $f(\pi) = \min(\frac{2\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}} - l_1 - l_2, l_1 + l_2)$

Απόδειξη: Ας σταθεροποιήσουμε την γ_1 αφήνοντας την γ_2 να μεταβάλεται μαζί με την γωνία α.

Ισχυρισμος: Η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς α.
Πράγματι, στην περίπτωση που $H \leq 0$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα του Hadamard, επειδή η $\exp_{\bar{\gamma_1}(0)}$ είναι αμφιδιαφόριση. Αν $H > 0$, για ε αρκετά μικρό η $M^{H-\varepsilon}$ είναι 2-σφαίρα καμπυλότητας $H-\varepsilon$, επομένως η $\exp_{\bar{\gamma_1}}|_{B_{\frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}}(0)}$ είναι αμφιδιαφόριση. Αρκεί λοιπόν $\bar{\gamma_2}(l_2) \in \exp_{\bar{\gamma_1}(0)}(B_{\frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}}(0))$ για κάθε $0 \leq \alpha \leq \pi$, δηλαδή ότι $d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2)) < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$.
Έστω λοιπόν ότι $d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2)) = \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$. Τότε η $\bar{\gamma_1} \cup \bar{\gamma_2}$ είναι μια σπασμένη γεωδαισιακή ανάμεσα στα αντιδιαμετρικά σημεία $\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}$ της σφαίρας $M^{H-\varepsilon}$ και αφού $L(\gamma_i) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$ έπεται ότι η γεωδαισιακή αυτή είναι ομαλή και άρα $\alpha = \pi$.

Επιστρέφοντας τώρα στην απόδειξη του βήματος (1), έχουμε το $\bar{\gamma_2}(l_2)$ να κινείται πάνω σε κύκλο ακτίνας l_2 γύρω από το $\bar{\gamma_2}(0)$. Έστω $\bar{\sigma}_\alpha$ το ελαχιστοποιούν γεωδαισιακό τμήμα, μοναδιαίας ταχύτητας, από το $\bar{\gamma_1}(0)$ στο $\bar{\gamma_2}(l_2)$ μήκους l.

Αν $0 < \alpha < \pi$ η $\bar{\sigma_\alpha}$ δεν είναι κάθετη στον κύκλο αυτό. Στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $\bar{\sigma_\alpha} = \bar{\gamma_2}'(l_2)$ από το Λήμμα του Gauss.(περίπτωση $\bar{\sigma_\alpha} = -\bar{\gamma_2}'(l_2)$ απορρίπτεται λόγω μοναδικότητας των γεωδαισιακών).Συνεπώς θα είχαμε ότι η $\bar{\sigma_\alpha} \cup \bar{\gamma_2}$ είναι μια ομαλή γεωδαισιακή, διαφορετική από την $\bar{\gamma_1}$, από το $\bar{\gamma_1}(0)$ στο $\bar{\gamma_1}(l_1)$ το οποίο είναι αδύνατο αφού είτε $H - \varepsilon < 0$ είτε $l_1 < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$ και η $M^{H-\varepsilon}$ είναι σφαίρα. Τώρα, από τον τύπο για την πρώτη παράγωγο του μήκους της μεταβολής $\{\bar{\sigma}_\alpha\}$ έχουμε

$$f'(a) = \frac{d}{dt}L(\bar{\sigma}_\alpha) = \langle V_\alpha, \bar{\sigma_\alpha}' \rangle |_0^l - \int_0^l \langle V_\alpha, \nabla_{\bar{\sigma_\alpha}'}\bar{\sigma_\alpha}' \rangle \, dt =$$
$$= \langle V_\alpha, \bar{\sigma_\alpha'} \rangle |_0^l = \langle V_\alpha(l), \bar{\sigma}'_\alpha(l) \rangle \neq 0$$

όπου V_α είναι το πεδίο μεταβολής, με V_α να είναι εφαπτόμενο στον κυκλο που κινείται το $\bar{\gamma_2}(l_2)$ και όχι κάθετο με το $\bar{\sigma_\alpha}(l)$ για $0 < \alpha < \pi$.
Έπεται ότι η f είναι αυστηρά μονότονη και αφού

$$f(0) = |l_2 - l_1| < \min\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}} - l_1 - l_2, l_1 + l_2\right\} = f(\pi)$$

βλέπουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. $\square$

(2) Στην $M^{H-\varepsilon}$ ένα τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ με πλευρές $\leq \frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$ καθορίζεται ως προς ισομετρία από τα μήκη l_1, l_2, l_3 των πλευρών του.

Απόδειξη: Έστω $(\bar{\sigma_1}, \bar{\sigma_2}, \bar{\sigma_3})$ ένα άλλο τρίγωνο στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\bar{\sigma_i}) = L(\bar{\gamma_i})$. Λόγω του βήματος (1) για σταθεροποιημένα l_1, l_2 η γωνία $\bar{\alpha_3}$ καθορίζεται πλήρως από το μήκος $L(\bar{\gamma_3})$ (η $\bar{\gamma_3}$ είναι ελαχιστοποιούσα). Έχουμε λοιπόν για τα δύο τρίγωνα ότι $\sphericalangle(-\bar{\gamma_1}'(l_1), \bar{\gamma_2}'(0)) = \sphericalangle(-\bar{\sigma_1}'(l_1), \bar{\sigma_2}'(0)) = \bar{\alpha_3}$.

Υπάρχει επομένως ισομετρία

$$I : T_{\bar{\gamma_1}(l_1)}M^{H-\varepsilon} \to T_{\bar{\sigma_1}(l_1)}M^{H-\varepsilon}$$

με $I(-\bar{\gamma_1}'(l_1)) = -\bar{\sigma_1}'(l_1)$ και $I(-\bar{\gamma_2}'(0)) = -\bar{\sigma_2}'(0)$. Από το θεώρημα του Cartan υπάρχει μια ισομετρία $\Phi : M^{H-\varepsilon} \to M^{H-\varepsilon}$ ώστε $\Phi(\bar{\gamma_1}(l_1)) = \bar{\sigma_1}(l_1)$ που απεικονίζει την $\bar{\gamma_1}$ στην $\bar{\sigma_1}$ και την $\bar{\gamma_2}$ στην $\bar{\sigma_2}$.Επίσης, επειδή η Φ είναι ισομετρία, θα απεικονίζει την $\bar{\sigma_3}$ σε μια γεωδαισιακή με μήκος $l_3 < \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$ που ενώνει τα $\bar{\sigma_1}(0)$ και $\bar{\sigma_2}(l_2)$.Όμως η $\bar{\sigma_3}$ είναι η μοναδική με αυτή την ιδιότητα, οπότε η Φ απεικονίζει ισομετρικά το τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ στο $(\bar{\sigma_1}, \bar{\sigma_2}, \bar{\sigma_3})$. $\square$

(3) Έστω μια γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ στην M τέτοια ώστε η γ_1 να είναι ελαχιστοποιούσα και $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(Α′) Αν γ_3 μια οποιαδήποτε ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\gamma_2(l_2)$ στο $\gamma_1(0)$, υπάρχει τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i})$ και $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$.

(Β′) Αν $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\alpha_3})$ μια γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i}) \quad i = 1, 2$, τότε

$$l_2 - l_1 \leq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$$

Απόδειξη:

(Α′)⇒(Β′): Έστω $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\alpha_3})$ μια γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i}) \quad i = 1, 2$. Λόγω του (Α′), αν η γ_3 είναι μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\gamma_2(l_2)$ στο $\gamma_1(0)$ και $l_i = L(\gamma_i)$ υπάρχει τρίγωνο $(\bar{\sigma_1}, \bar{\sigma_2}, \bar{\sigma_3})$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\bar{\sigma_i}) = l_i$ και $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$. Επομένως, τα l_i ικανοποιουν τις τριγωνικές ανισότητες και άρα έχουμε

$$l_2 - l_1 \leq l_3 = d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

Για την άλλη ανισότητα του (Β′), αφού $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3 \leq \pi$ έπεται ότι για την γωνία $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \alpha_3)$, λόγω του (1), ισχύει ότι

$$l_3 = d(\bar{\sigma_1}(0), \bar{\sigma_2}(l_2)) \leq d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$$

η οποία είναι η ζητούμενη ανισότητα.

(B′)⇒(A′): Έστω γ_3 μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή όπως στο (A′). Αν $(\bar{\sigma_1}, \bar{\sigma_2}, \alpha_3)$ η αντίστοιχη γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$ και $(\bar{\sigma_1}, \bar{\sigma_2}, \bar{\sigma_3})$ το τρίγωνο που σχηματίζεται αν η $\bar{\sigma_3}$ είναι ελαχιστοποιούσα, από το (B′) έπεται ότι

$$l_2 - l_1 \leq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\sigma_1}(0), \bar{\sigma_2}(l_2))$$

Έχουμε επίσης ότι

$$l_1 \leq d(\gamma_2(0), \gamma_2(l_2)) + l_3 \leq l_2 + l_3$$

και άρα

$$|l_2 - l_1| \leq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\bar{\sigma_1}(0), \bar{\sigma_2}(l_2))$$

Συνεπώς, από το (1), υπάρχει $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$, ώστε συμπληρώνοντας την γωνία $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\alpha_3})$, $L(\bar{\gamma_i}) = l_i$, με μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή $\bar{\gamma_3}$ το τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ να έχει ίσες πλευρές με το $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ και επιπλέον $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$. □

Ορισμός 3.3 *Έστω μια γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ και έστω $r > 0$ ώστε $r = \max L(\gamma_i)$. Αν η $\exp|_{B_{2r}(0)}$ είναι εμφύτευση τότε η γωνία θα λέγεται μικρή.*
Αντίστοιχα, ένα τρίγωνο θα λέγεται μικρό αν κάθε γωνία του είναι μικρή.

(4) Τα (A) και (B) του θεωρήματος ισχύουν για μικρά τρίγωνα και μικρές γωνίες αντίστοιχα, συγκρίνοντας με την $M^{H-\varepsilon}$.

Απόδειξη: Το (B) ισχύει για μικρές γωνίες.
Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ μια μικρή γωνία στην M, και έστω μια γωνία $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \alpha_3)$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i})$ και έστω $p = \gamma_1(l_1), \bar{p} = \bar{\gamma_1}(l_1)$ και $\bar{\gamma_3}$ μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\bar{\gamma_1}(0)$ στο $\bar{\gamma_2}(l_2)$.
Τότε υπάρχει μια ισομετρία $I : T_{\bar{p}}M^{H-\varepsilon} \to T_pM$ τέτοια ώστε $I(\bar{\gamma_1}'(l_1)) = \gamma_1'(l_1)$ και $I(\bar{\gamma_2}'(0)) = \gamma_2'(0)$.

Ορίζουμε στην M την καμπύλη $c = \exp_p \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{\gamma_3})$.
Η c είναι ορισμένη καλά, αφού, αν $H \leq 0$ η $\exp_{\bar{p}}$ είναι αμφιδιαφόριση, ενώ αν $H > 0$, η $\bar{\gamma_3}$ αντιστρέφεται μέσω της $\exp_{\bar{p}}^{-1}$ επειδή η γωνία είναι μικρή.
Η c λοιπόν είναι μια καμπύλη που συνδέει τα $\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)$ και αφού η γωνία είναι μικρή, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rauch I για να παρουμε την ανισότητα $L(c) \leq L(\bar{\gamma_3})$. Έχουμε επομένως ότι

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq L(c) \leq L(\bar{\gamma_3}) = d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό για μικρές γωνίες.

Για να αποδείξουμε ότι το (A) ισχύει για μικρά τρίγωνα θα χρησιμοποιήσουμε το βήμα (3). Έστω ένα μικρό τρίγωνο $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, οπότε κάθε γ_i είναι ελαχιστοποιούσα. Τώρα, η γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ είναι μικρή, επομένως χρησιμοποιώντας το (3)

βλέπουμε ότι υπάρχει ένα τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$ και ίδια μήκη πλευρών.
Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για τις άλλες γωνίες του τριγώνου $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, λόγω του (2) τα τρίγωνα της $M^{H-\varepsilon}$ που προκύπτουν δεν είναι διαφορετικά, και λόγω του (A′) του βήματος (3) θα έχουμε ότι $\bar{\alpha_i} \leq \alpha_i$. $\square$

Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ μια γωνία στην M, με γ_1 ελαχιστοποιούσα και $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ και έστω $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \frac{\pi}{2})$ η αντίστοιχη γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$.Έστω επιπλέον $\bar{\gamma_3}$ το ελαχιστοποιούν γεωδαισιακό τμήμα από το $\bar{\gamma_2}(l_2)$ στο $\bar{\gamma_1}(0)$ και ότι για κατάλληλη συνάρτηση f έχουμε ότι

$$\bar{\gamma_3}(t) = \exp_{\bar{\gamma_2}(t)} f(t)\bar{E}(t)$$

όπου $\bar{E}(t)$ είναι το μοναδιαίο παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατα μήκος της $\bar{\gamma_2}$, με $\bar{E}(0) = -\bar{\gamma_1}'(l_1)$. Έστω $E(t)$ το παράλληλο πεδίο κατα μήκος της γ_2 με $E(0) = -\gamma_1'(l_1)$.

Ορισμός 3.4 *Η γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ θα ονομάζεται λεπτή ορθή γωνία αν οι υποθέσεις του Πορίσματος του Rauch II ισχύουν για τις καμπύλες $\exp f(t)E(t)$ και $\exp f(t)\bar{E}(t)$, δηλαδή, για κάθε t, οι γεωδαισιακές $s \mapsto \exp_{\gamma_2(t)} sE(t)$ να μην έχουν focal points για $s < f(t)$.*

Με εφαρμογή λοιπόν του πορίσματος του Rauch II, έχουμε άμεσα το:

(5) Το (B) ισχύει για λεπτές ορθές γωνίες.

Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ μια γωνία στην M, με $\alpha > \frac{\pi}{2}$ και έστω $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \alpha)$ η αντίστοιχη γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$ με $L(\gamma_i) = L(\bar{\gamma_i})$ και $\bar{\gamma_3}$ το ελαχιστοποιούν γεωδαισιακό τμήμα από το $\bar{\gamma_2}(l_2)$ στο $\bar{\gamma_1}(0)$.Έστω $\bar{\sigma} : [0, l] \to M^{H-\varepsilon}$ το γεωδαισιακό τμήμα από το $\bar{\gamma_2}(0)$ τέτοιο ώστε $<\bar{\sigma}'(0), \bar{\gamma_2}'(0)>= 0$ και $\bar{\sigma}'(0) = -\delta\bar{\gamma_1}'(l_1) + \beta\bar{\gamma_2}'(0)$ για κάποια $\beta, \delta > 0$ και $\bar{\sigma}(l)$ το πρώτο σημείο του $\bar{\sigma}$ που βρίσκεται στην $\bar{\gamma_3}$.

Γυρνώντας πίσω στην $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ της M, θεωρούμε το γεωδαισιακό τμήμα σ από το $\gamma_2(0)$ τέτοιο ώστε $<\bar{\sigma}'(0), \bar{\gamma_2}'(0)>= 0$, $\sigma'(0) = -\delta\gamma_1'(l_1) + \beta\gamma_2'(0)$ και $L(\sigma) = L(\bar{\sigma}) = l$

Ορισμός 3.5 *Η γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ θα ονομάζεται λεπτή αμβλεία γωνία αν η $(\gamma_1, \sigma, \alpha - \frac{\pi}{2})$ είναι μικρή γωνία και η $(\sigma, \gamma_2, \frac{\pi}{2})$ λεπτή ορθή γωνία.*

Για τις λεπτές αμβλείες γωνίες έχουμε το:

(6) Το (B) του θεωρήματος ισχύει για λεπτές αμβλείες γωνίες.

Απόδειξη: Λόγω της τριγωνικής ανισότητας στην M έχουμε ότι:

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\gamma_1(0), \sigma(l)) + d(\gamma_2(l_2), \sigma(l))$$

Επιπλέον, από το (4) έχουμε:

$$d(\gamma_1(0), \sigma(l)) \leq d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\sigma}(l))$$

ενώ από το (5) έχουμε:

$$d(\gamma_2(l_2), \sigma(l)) \leq d(\bar{\gamma_2}(l_2), \bar{\sigma}(l))$$

Οπότε, $d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) \leq d(\gamma_1(0), \sigma(l)) + d(\bar{\gamma_2}(l_2), \bar{\sigma}(l)) = d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$ (επειδή $\bar{\sigma}(l)$ είναι σημείο του τμήματος $\bar{\gamma_3}$ που είναι ελαχιστοποιούν) $\square$

Έστω γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ στην M με $\alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\gamma_2(l)$ το σημείο της γ_2 πλησιέστερα στο $\gamma_1(0)$. Επειδή $\alpha < \frac{\pi}{2}$, από τον τύπο για την πρώτη παράγωγο του μήκους μιας μεταβολής προκύπτει ότι $l > 0$ και μάλιστα η ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή $\sigma : [0, k] \to M$ από το $\gamma_1(0)$ στο $\gamma_2(l)$ τέμνει κάθετα την γ_2.Έστω τώρα $\tau = \gamma_2|_{[0,l]}$ και $\theta = \gamma_2|_{[l,l_2]}$.

Ορισμός 3.6 *Η γωνια $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ θα ονομάζεται λεπτή οξεία γωνία αν το (γ_1, τ, σ) είναι μικρό τρίγωνο , $0 < l < l_2$ και η $(\sigma, \theta, \frac{\pi}{2})$ είναι λεπτή ορθή γωνία.*

(7) Το (Β) του θεωρήματος ισχύει για λεπτές οξείες γωνίες.

Απόδειξη: Εφόσον το τρίγωνο (γ_1, τ, σ) είναι μικρό, από το (4) έπεται ότι υπάρχει τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\tau}, \bar{\sigma})$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με:
$L(\bar{\gamma_1}) = L(\gamma_1)$, $L(\bar{\tau}) = L(\tau)$, $L(\bar{\sigma}) = L(\sigma)$, $\sphericalangle(-\bar{\gamma_1}'(l_1), \bar{\tau}'(0)) = \bar{\alpha} \leq \alpha$ και $\sphericalangle(-\bar{\tau}'(l), \bar{\sigma}'(k)) = \bar{\alpha_1} \leq \frac{\pi}{2}$.
Έστω $\bar{\theta} : [l, l_2] \to M^{H-\varepsilon}$ η γεωδαισιακή που ορίζεται από τις $\bar{\theta}(l) = \bar{\tau}(l)$, $\bar{\theta}'(l) = \bar{\tau}'(l)$ (ουσιαστικά προεκτείνουμε την $\bar{\tau}$ προσθέτοντας ένα γεωδαισιακό τμήμα μήκους $l_2 - l$) και έστω $\bar{\gamma_2} = \bar{\tau} \cup \bar{\theta}$.
Λόγω του (5), το (Β) του θεωρήματος ισχύει για την λεπτή ορθή γωνία $(\sigma, \tau, \frac{\pi}{2})$, οπότε, επειδή $\pi - \alpha_1 \geq \frac{\pi}{2}$, εφαρμόζοντας το (1), έπεται ότι

$$d(\sigma(0), \theta(l_2)) \leq d(\bar{\sigma}(0), \bar{\theta}(l_2))$$

και επομένως

$$d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2)) = d(\bar{\sigma}(0), \bar{\gamma_2}(l_2)) \geq d(\sigma(0), \theta(l_2)) = d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

Τώρα, αφού $\bar{\alpha} \leq \alpha$, αν μεγαλώσουμε την γωνία $\bar{\alpha}$ ώστε να γίνει ίση με α, για την γωνία $(\tilde{\gamma_1}, \tilde{\gamma_2}, \alpha)$ που προκύπτει και έχει πλευρες ίσες με της $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$, λόγω του (1) θα έχουμε:

$$d(\tilde{\gamma_1}(0), \tilde{\gamma_2}(0)) \geq d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(0)) \geq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2))$$

η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ορισμός 3.7 *Ένα τρίγωνο $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ στην M θα το ονομάζουμε λεπτό αν οι γωνίες $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ και $(\gamma_3, \gamma_2, \alpha_1)$ είναι λεπτές γωνίες. Έπεται, από τους ορισμούς των λεπτών γωνιών ότι οι γ_1, γ_3 είναι ελαχιστοποιούσες.*

(8) Το θεώρημα ισχύει για λεπτά τρίγωνα.

Απόδειξη: Έστω λεπτό τρίγωνο $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.Λόγω των (5)-(7), για την γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ θα ισχύει το (B), οπότε, λόγω της ισοδυναμίας του (3), θα υπάρχει τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ στην $M^{H-\varepsilon}$ με ίσες πλευρές και $\bar{\alpha_3} \leq \alpha_3$. Αφού όλες οι πλευρές του είναι $< \frac{\pi}{\sqrt{H-\varepsilon}}$, λόγω του (2) θα καθορίζεται ως προς ισομετρία από τα μήκη τους. Επομένως, θεωρώντας την γωνία $(\gamma_3, \gamma_2, \alpha_1)$ όμοια θα καταλλήξουμε ξανά στο τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$, μόνο που αυτή τη φορά το (3) θα συνεπάγεται ότι $\bar{\alpha_1} \leq \alpha_1$. Επομένως το τρίγωνο $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \bar{\gamma_3})$ είναι ακριβώς αυτό που αποδεικνύει τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Έχουμε, λοιπόν δείξει ότι το θεώρημα ισχύει αν έχουμε μικρά/λεπτά τρίγωνα ή γωνίες, πάντα συγκρίνοντας με αντίστοιχες κατασκευές στην $M^{H-\varepsilon}$ και όχι στην M^H, κάτι που ήταν απαραίτητο μέχρι στιγμής για να έχουμε την μοναδικότητα του (2), η οποία χρειάζεται για την απόδειξη του θεωρήματος για μικρά τρίνωνα και κατ΄ επέκταση για λεπτές γωνίες στα (6),(7) και λεπτά τρίγωνα στο (8). Επιπλέον, ας υπενθυμήσουμε ότι αυτή η υπόθεση χρειάστηκε ακόμη και στον ορισμό των λεπτών γωνιών. Στην συνέχεια θα δούμε οτι και για την απόδειξη του θεωρήματος για γενικά τρίγωνα(που να ικανοποιούν τις υποθέσεις φυσικά) η υπόθεση ότι δουλεύουμε στην $M^{H-\varepsilon}$ είναι επίσης απαραίτητη.

Έστω τώρα αυθαίρετη γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ στην M , N θετικός ακέραιος και ας είναι $\tau_{k,l} = \gamma_2|_{\left[k\frac{l_2}{N},(k+l)\frac{l_2}{N}\right]}$, όπου $0 \leq k, l \leq N$. Επίσης, έστω σ_k ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\gamma_1(0)$ στο $\gamma_2(k\frac{l_2}{N})$ και το τρίγωνο $T_{k,l} = (\sigma_k, \tau_{k,l}, \sigma_{k+l})$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $L(\gamma_1)+L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2)$.Διαφορετικά, αν $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_2}, \alpha)$ η αντίστοιχη γωνία στην $M^{H-\varepsilon}$ θα είχαμε:

$$L(\gamma_1) + L(\sigma_N) < L(\gamma_2) = L(\bar{\gamma_2}) \leq L(\bar{\gamma_1}) + d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$$

$$\Rightarrow L(\sigma_N) < d(\bar{\gamma_1}(0), \bar{\gamma_2}(l_2))$$

που είναι ο ισχυρισμός του (B). (Στην $M^{H-\varepsilon}$ η $\bar{\gamma_2}$ είναι ελαχιστοποιούσα).

Ισχυρισμος: Τα τρίγωνα $T_{k,l}$ ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες.

Αποδειξη: Θα δείξουμε την ανισότητα $L(\sigma_k)+L(\sigma_{k+l}) \geq L(\tau_{k,l})$, αφού οι άλλες δυο ανισότητες,

$$L(\sigma_k) \leq L(\tau_{k,l}) + L(\sigma_{k+l})$$

$$L(\sigma_{k+l}) \leq L(\tau_{k,l}) + L(\sigma_k)$$

ισχύουν επειδή σ_k, σ_{k+l} είναι ελαχιστοποιούσες (τριγωνική ανισότητα). Έχουμε λοιπόν ότι:

$$L(\gamma_1) + L(\sigma_N) \geq L(\gamma_2) \tag{3.1}$$
$$L(\tau_{0,k}) + L(\sigma_k) \geq L(\gamma_1) \tag{3.2}$$
$$L(\tau_{k+l,N-k-l}) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\sigma_N) \tag{3.3}$$

Όπου η (1.2),(1.3) ισχύουν επειδή οι $\gamma_1, \sigma_k, \sigma_{k+l}, \sigma_N$ είναι ελαχιστοποιούσες. Προσθέτοντας κατα μέλη έχουμε:

$$L(\sigma_{k+l}) + L(\tau_{0,k}) + L(\tau_{k+l,N-k-l}) \geq L(\gamma_2) =$$
$$= L(\tau_{0,k}) + L(\tau_{k,l}) + L(\tau_{k+l}) + L(\tau_{k+l,N-k-l})$$
$$\Rightarrow L(\sigma_k) + L(\sigma_{k+l}) \geq L(\tau_{k,l})$$

Παρατηρηση: Αν το N είναι αρκετά μεγάλο τότε όλα τα τρίγωνα $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \sigma_{k+1})$ είναι λεπτά. Πράγματι, αν L είναι το μέγιστο της καμπυλότητας της M σε μια συμπαγή περιοχή C στην M που να περιέχει όλες τις ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές που ενώνουν σημεία των πλευρών του τριγώνου $(\gamma_1, \gamma_2, \sigma_N)$, τότε για N αρκετά μεγάλο, επειδή δουλεύουμε στην $M^{H-\varepsilon}$, για κάθε γωνία $(\sigma_k, \tau_{k,1}, \alpha_k)$ και $(\sigma_k, \tau_{k-1,1}, \beta_{k-1})$ υπάρχουν οι συναρτήσεις f που απαιτούνται για τον ορισμό της λεπτής ορθής γωνίας και επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\| < \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$ οπότε και ισχύουν οι υποθέσεις του πορίσματος Rauch II, λόγω απουσίας focal points (από Rauch II συγκρίνοντας με την σφαίρα καμπυλότητας L).

(9) Αν το (A) ισχύει για όλα τα τρίγωνα $T_{k,l}$ με σταθεροποιημένο l και όλα τα k τότε το (B) ισχύει για όλες τις γωνίες $(\sigma_k, \tau_{k,l+1}, \alpha_k)$ και $(\sigma_{k+l+1}, \tau_{k,l+1}, \beta_{k+l})$ των τριγώνων $T_{k,l+1}$ για αυτό το l και όλα τα k.(Οπότε από το (3) έπεται ότι και το (A) ισχύει για όλα τα τρίγωνα $T_{k,l+1}$)

Απόδειξη: Έχουμε ότι το (A) ισχύει για το τρίγωνο $T_{k,l}$. Θα αποδείξουμε ότι το (B) ισχύει για την γωνία $(\sigma_k, \tau_{k,l+1}, \alpha_k)$. Λόγω του (A) υπάρχει στην $M^{H-\varepsilon}$ ένα τρίγωνο $\bar{T}_{k,l}$ με πλευρές $\bar{\sigma}_k, \bar{\sigma}_{k+l}, \bar{\tau}_{k,l}$, ίσες με αυτές του $T_{k,l}$ και με $\bar{\alpha}_k \leq \alpha_k$, $\bar{\beta}_{k+l} \leq \beta_{k+l}$. Στη συνέχεια προεκτείνουμε την $\bar{\tau}_{k+l,1}$ με ένα τμήμα $\bar{\tau}_{k+l,1}$ μήκους $L(\tau_{k+l,1})$. Όμως η γωνία $(\sigma_{k+l}, \tau_{k+l,1}, \alpha_{k+l})$ είναι λεπτή και λόγω των (5)-(7) το (B) του θεωρήματος ισχύει σε αυτή. Τώρα, με ένα επιχείρημα ακριβως ίδιο με αυτό του βήματος (7) προκύπτει ότι το (B) ισχύει και για την $(\sigma_k, \tau_{k,l+1}, \alpha_k)$. Τώρα θα δείξουμε ότι το (B) ισχύει και για την γωνία $(\sigma_{k+l+1}, \tau_{k,l+1}, \beta_{k+l})$. Όμοια με πριν, ξέρουμε ότι το (A) ισχύει για το τρίγωνο $T_{k+1,l}$, από την υπόθεση, και ότι το (B) ισχύει για την γωνία $(\sigma_{k+1}, \tau_{k,1}, \beta_k)$, γιατί είναι λεπτή. Με το ίδιο επιχείρημα έπεται το ζητούμενο.$\square$

(10) Τα (Α) και (Β) ισχύουν για γενικά τρίγωνα και γωνίες, όταν παιρνάμε από την M στην $M^{H-\varepsilon}$.

Απόδειξη: Έστω το τρίγωνο $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,$(\gamma_1, \gamma_3)$ ελαχιστοποιούσες) Θα δείξουμε με επαγωγή στο l ότι τα (Α) και (Β) ισχύουν για το $T_{k,l}$ για κάθε k, l $(l \leq N - k)$.

Για $l = 1$ τα (Α) και (Β) ισχύουν γιατί τα τρίγωνα $T_{k,1}$ είναι λεπτά.

Τώρα, χρησιμοποιώντας το (9) έχουμε το επαγωγικό βήμα, ότι αν (Α),(Β) ισχύουν για τα τρίγωνα $T_{k,l-1}$, για όλα τα k, τότε τα (Α) και (Β) ισχύουν για τα τρίγωνα $T_{k,l}$ για όλα τα k.

Τέλος, για $k = 0$ και $l = N$ έχουμε το ζητούμενο, αφού $T_{0,N} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.□

(11) Το θεώρημα ισχύει όταν συγκρίνουμε με τρίγωνα στην M^H.

Απόδειξη:Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ μια γωνία στην M με γ_1 ελαχιστοποιούσα και $L(\gamma_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$.Έχουμε δείξει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ για την αντίστοιχη γωνία $(\bar{\gamma}_1^\varepsilon, \bar{\gamma}_2^\varepsilon, \alpha)$ στην $M^{H-\varepsilon}$, ισχύει $d(\bar{\gamma}_1^\varepsilon(0), \bar{\gamma}_2^\varepsilon(l_2) \geq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_3))$.

Η συνάρτηση στο αριστερό μέλος είναι συνεχής ως προς ε, οπότε παίρνοντας όριο $\varepsilon \to 0$, έχουμε το (Β) του θεωρήματος, δηλαδή:

$$d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2)) \geq d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_3))$$

Μένει να δείξουμε το (Α). Για να γίνει αυτό, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αν $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ τα συμπεράσματα των (1),(2) και (3) εξακολουθούν να ισχύουν αν στη θέση της $M^{H-\varepsilon}$ έχουμε την M^H, επομένως, όμοια με την απόδειξη του (Α) για μικρά τρίγωνα (στο (4)) έχουμε τα εξής:

Άν $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ τρίγωνο στην M, με $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος, έστω $(\bar{\gamma_1}, \bar{\gamma_1}, \bar{\alpha_3})$ η αντίστοιχη της $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha_3)$ γωνία στην M^H. Τότε, όπως αποδείξαμε, ισχύει το (Β) του θεωρήματος και επειδή $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ ισχύει και το (Α′) του (3), σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση. Επομένως υπάρχει στην M^H τρίγωνο $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3)$ με ίδια μήκη πλευρών και $\tilde{\alpha}_3 \leq \alpha_3$.

Όμως, το (Β) του θεωρήματος ισχύει και για την γωνία $(\gamma_3, \gamma_2, \alpha_1)$, το οποίο συνεπάγεται όπως πριν ότι υπάρχει τρίγωνο $(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3)$ στην M^H με ίδια μήκη πλευρών και $\hat{\alpha}_1 \leq \alpha_1$. Οπως παρατηρήσαμε όμως, επειδή $L(\gamma_i) < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, το συμπέρασμα του (2) ισχύει, επομένως τα δύο τρίγωνα στην M^H είναι ίσα (ως προς ισομετρία), και οι δύο ανισότητες για τις γωνίες τους συμπληρώνουν τον ισχυρισμό του (Α) του θεωρήματος. Παρατηρούμε οτι το τρίγωνο στην M^H είναι μονοσήμαντα καθορισμένο λόγω του (2).

Στην περίπτωση που, πάντα κάτω από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, για κάποιο i_o έχουμε $L(\gamma_{i_o}) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ (αν έχουμε $H > 0$), τότε μια γεωδαισιακή με ίδιο μήκος στην M^H ενώνει αντιδιαμετρικά σημεία της σφαίρας και επομένως έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(I) Αν δυο πλευρές του «τριγώνου» έχουν μήκος $= \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ τότε από το (B) έπεται το μήκος της τρίτης είναι 0 (μια τουλάχιστον είναι ελαχιστοποιούσα). Δηλαδή αν στην M δυο διαφορετικές γεωδαισιακές ξεκινούν από το ίδιο σημείο, έχουν μήκος ίσο με $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$, και τουλάχιστον μια από αυτές είναι ελαχιστοποιούσα, τότε αυτές ξανασυναντώνται μετά από χρόνο $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

(II) Αν μόνο μια από τις πλευρές του τριγώνου έχει μήκος $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$, τότε αν $L(\gamma_{i_o}) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$, λόγω του (B)

$$|l_{i_o} - l_{i_o-1}| \leq d(\gamma_{i_o-1}(0), \gamma_{i_o}(l_{i_o})) \leq d(\bar{\gamma}_{i_o-1}(0), \bar{\gamma}_{i_o}(l_{i_o})) = |l_{i_o} - l_{i_o-1}| < \frac{\pi}{\sqrt{H}}$$

και επομένως οι $\gamma_{i_0-1}, \gamma_{i_o+1}$ σχηματίζουν μια σπασμένη γεωδαισιακή με μήκος $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ από το $\gamma_{i_o}(0)$ στο $\gamma_{i_o}(\frac{\pi}{\sqrt{H}})$.

Επιπλέον, υπάρχει τρίγωνο στην M^H όπως στο (A) του θεωρήματος, αλλά αυτό δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. $\square$

Θα συνεχίσουμε με μια τυπική εφαρμογή του Θεωρήματος του Toponogov, το οποίο μας δίνει την δυνατότητα να συγκρίνουμε μια πλήρη πολλαπλότητα Riemann M με μια απλά συνεκτική πολλαπλότητα σταθερής καμπυλότητας, η οποία έχει γνωστές γεωμετρικές ιδιότητες, και να βγάλουμε συμπεράσματα για την γεωμετρία της M.

Ορισμός 3.8 *Έστω M μια πλήρης, μη-συμπαγής, πολλαπλότητα Riemann. Μια γεωδαισιακή $\gamma : [0, +\infty) \to M$, με $\|\gamma'\| = 1$, θα την ονομάζουμε ακτίνα (ray) αν $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$.*

Πρόταση 3.1 *Αν $p \in M$, όπου M όπως παραπάνω, υπάρχει πάντα μια ακτίνα γ με $\gamma(0) = p$.*

Απόδειξη: Εφόσον η M δεν είναι συμπαγής υπάρχει ακολουθία $\{p_n\}$ σημείων της ώστε $d(p, p_n) \to +\infty$. Έστω $\{\gamma_n\}$ ακολουθία γεωδαισιακών, ώστε για κάθε n η γ_n να είναι ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το p στο p_n, και $\|\gamma_n'(0)\| = 1$. Επειδή η ακολουθία $\{\gamma_n'(0)\}$ είναι ακολουθία στην συμπαγή μοναδιαία σφαίρα στον T_pM, θα έχει ένα σημείο συσσώρευσης $v \in T_pM$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\{\gamma_n\}$ είναι μια υπακολουθία ώστε $\gamma_n'(0) \to v$. Έστω επίσης γ η γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας με $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = v$.

Έστω $t \in [0, +\infty)$. Αφού $d(p, p_n) \to +\infty$, για n αρκετά μεγάλο θα έχουμε ότι $d(p, \gamma_n(t)) = t$. Παίρνοντας όριο $n \to +\infty$, λόγω της συνεχούς εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες της εξίσωσης των γεωδαισιακών αλλά και της συνέχειας της συνάρτησης της απόστασης, καταλήγουμε στην σχέση $d(p, \gamma(t)) = t$.

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $t \in [0, +\infty)$, έπεται ότι η γ είναι ακτίνα. □

Θεώρημα 3.2 *Έστω M μια πλήρης, μη συμπαγής, πολλαπλότητα Riemann με μη αρνητική καμπυλότητα και $\gamma : [0, +\infty) \to M$ ακτίνα. Έστω $\sigma : [0, +\infty) \to M$ γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας με $\gamma(0) = \sigma(0)$ και $\sphericalangle(\gamma'(0), \sigma'(0)) < \frac{\pi}{2}$. Τότε*

$$\lim_{t\to+\infty} d(\sigma(0), \sigma(t)) = +\infty$$

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $s, t \in [0, +\infty)$ και έστω $\tau_{s,t}$ ένα ελαχιστοποιούν γεωδαισιακό τμήμα από το $\sigma(t)$ στο $\gamma(s)$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$d(\gamma(s), \gamma(0)) \leq d(\sigma(0), \sigma(t)) + d(\gamma(s), \sigma(t)) \tag{3.4}$$
$$\Rightarrow d(\sigma(0), \sigma(t)) \geq d(\gamma(s), \gamma(0)) - d(\gamma(s), \sigma(t)) = s - L(\tau_{s,t}) \tag{3.5}$$

Θεωρούμε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα $\gamma|_{[0,s]}, \sigma|_{[0,t]}$ και $\tau_{s,t}$. Επειδή $\tau_{s,t}$ ελαχιστοπούσα και $K_M \geq 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Toponogov για να συγκρίνουμε με τον $\Re^2$. Συνεπώς, υπάρχει στον $\Re^2$ ένα τρίγωνο με ίσα μήκη πλευρών και γωνία $\alpha^* \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του συνημιτόνου έχουμε:

$$L(\tau_{s,t})^2 = t^2 + s^2 - 2ts\cos\alpha^* \Rightarrow$$
$$s^2 - L(\tau_{s,t})^2 = -t^2 + 2ts\cos\alpha^* \Rightarrow$$
$$s - L(\tau_{s,t}) = \frac{-t^2 + 2ts\cos\alpha^*}{s + L(\tau_{s,t})} = \frac{-\frac{t^2}{s} + 2t\cos\alpha^*}{1 + \frac{L(\tau_{s,t})}{s}}$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το όριο του κάτω φράγματος $s - L(\tau_{s,t})$ για $s \to +\infty$. Έχουμε λοιπόν, από την τριγωνική ανισότητα στην M ότι:

$$\frac{s-d}{s} \leq \frac{L(\tau_{s,t})}{s} \leq \frac{d+s}{s}$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to+\infty} \frac{L(\tau_{s,t})}{s} = 1$$

όπου $d = d(\sigma(0), \sigma(t))$. Παίρνοντας όριο $s \to +\infty$ στην (3.5) έχουμε ότι

$$d(\sigma(0), \sigma(t)) \geq \lim_{s\to+\infty} (s - L(\tau_{s,t})) = t\cos\alpha^* \geq t\cos\alpha$$

Συνεπώς

$$\lim_{t\to+\infty} d(\sigma(0), \sigma(t)) = +\infty$$

□

Κεφάλαιο 4

Cut locus και εκτιμήσεις της Injectivity radius

4.1 Cut points

Λήμμα 4.1 *Έστω $p \in M$, όπου M μια πλήρης πολλαπλότητα Riemann, και γ μια γεωδαισική μοναδιαίας ταχύτητας με $\gamma(0) = p$.*
Έστω $C = \{t \in [0, +\infty) : d(\gamma(t), \gamma(0)) = t\}$. Τότε, το σύνολο C είναι της μορφής $[0, +\infty)$ ή $[0, t_0]$ για κάποιο $t_o \in (0, +\infty)$.

Απόδειξη:

1. Το C περιέχει μια περιοχή $[0, \varepsilon)$, για ε αρκετά μικρό.
   Απόδειξη: Αν V μια περιοχή του $0 \in T_pM$ ώστε η $\exp|_V$ να είναι εμφύτευση, τότε για αρκετά μικρό t, $t\gamma'(0) \in V$ και η γ είναι η μοναδική γεωδαισιακή που ενώνει το p με το $\gamma(t)$. Επομένως, από το θεώρημα των Hopf-Rinow, έπεται ότι είναι ελαχιστοποιούσα, έχουμε δηλαδή $t \in C$.

2. Αν για κάποιο $t \in C$, $d(p, \gamma(t)) < t$ τότε $d(p, \gamma(s)) < s$ για κάθε $s \geq t$.
   Απόδειξη: Πράγματι, έστω t όπως παραπάνω και $s = t + \alpha$, $\alpha > 0$. Τότε:
   $$d(\gamma(s), p) \leq d(\gamma(t + \alpha), \gamma(t)) + d(\gamma(t), p) < \alpha + t = s$$
   που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

3. Το C είναι κλειστό σύνολο.
   Απόδειξη: Έστω $t_n \to t_o$, $t_n \in C$. Τότε, $d(\gamma(t_n), \gamma(0)) = t_n$. Παίρνοντας όρια και χρησιμοποιώντας την συνέχεια της d έπεται ότι $d(\gamma(t_o), \gamma(0)) = t_o$. δηλαδή $t_o \in C$.

4. Το C είναι διάστημα.
   Απόδειξη: Έστω $t \in C$ και $s < t$. Αρκεί να δείξουμε ότι $s \in C$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε:
   $$d(p, \gamma(t)) \leq d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(s), \gamma(0))$$

Συνεπώς,

$$d(\gamma(s),\gamma(0)) \geq d(\gamma(t),\gamma(0)) - d(\gamma(s),\gamma(t)) \geq t - t + s = s$$

ενώ από τον ορισμό της απόστασης στην M έχουμε ότι $d(\gamma(s),\gamma(0)) \leq s$. Από τις δυο ανισότητες έπεται ότι $s \in C$.

Από τα (1)-(4), έπεται ότι το C είναι ένα μη κενό κλειστό διάστημα, το οποίο σίγουρα περιέχει μια περιοχή $[0,\varepsilon)$. Άρα θα είναι της μορφής $[0,+\infty)$ ή $[0,t_o]$ για κάποιο t_o. $\square$

Ορισμός 4.1 *Έστω $p \in M$ και γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας γ, με $\gamma(0) = p$. Αν υπάρχει t_o όπως το Λήμμα 1, το σημείο $\gamma(t_o)$ θα το ονομάζουμε cut point του $p = \gamma(0)$ κατά μήκος της γεωδαισιακής γ.*

Ορισμός 4.2 *Έστω $p \in M$. Η ένωση των cut points του p, ως πρός όλες τις γεωδαισιακές γ με $\gamma(0) = p$, ονομάζεται cut locus του p και θα την συμβολίζουμε με $C(p)$.*

Παράδειγμα: Έστω $M = S^n$ η n-διάστατη σφαίρα καμπυλότητας 1 και $p \in S^n$. Τότε κάθε γεωδαισιακή από το p έχει ως cut point το αντιδιαμετρικό σημείο του p, q, αφού οι γεωδαισιακές στην σφαίρα, που είναι μέγιστοι κύκλοι, δεν είναι ελαχιστοποιούσες πέρα από το αντιδιαμετρικό σημείο. Μάλιστα, το cut locus $C(p)$ αποτελείται μόνο από το σημείο q.

Ο ισχυρισμός του επομένου λήμματος είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα των cut points.

Λήμμα 4.2 *(A) Έστω $p \in M$ και $\gamma(t_o)$ cut point του $p = \gamma(0)$ πάνω στην γεωδαισιακή γ. Τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω:*

(α) $\gamma(t_o)$ συζυγές του p κατά μήκος της γ

(β) υπάρχει γεωδαισιακή $\sigma \neq \gamma$ από το p στο $\gamma(t_o)$ με $L(\sigma) = L(\gamma)$

(B) Έστω $p \in M$ και γεωδαισιακή γ με $\gamma(0) = p$ και t_0 το μικρότερο για το οποίο ισχύει κάποιο από τα (α) ή (β). Τότε το $\gamma(t_o)$ είναι το cut point του p κατά μήκος της γ.

Απόδειξη:

(A) Θεωρούμε γ σύμφωνα με την υπόθεση. Τότε, αν $\varepsilon_n > 0$ ακολουθία ώστε $\varepsilon_n \to 0$, υπάρχει ακολουθία $\{\sigma_n\}$ ελαχιστοποιουσών γεωδαισιακών με $\sigma_n(0) = p$, $\|\sigma_n'(0)\| = 1$, από το p στο $\gamma(t_o+\varepsilon_n)$. Λόγω της συμπάγειας της μοναδιαίας σφαίρας στον T_pM μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $v \in T_pM$ ώστε $\sigma_n'(0) \to v$. Έστω επίσης γεωδαισιακή σ με $\sigma(0) = p$ και $\sigma'(0) = v$. Τότε:

Η σ είναι ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή με $\sigma(t_o) = \gamma(t_o)$. Πράγματι, από την συνέχεια της exp (συνεχής εξάρτηση από αρχικές συνθήκες), καθώς και την συνέχεια της απόστασης στην M, έχουμε ότι:

$$d(\sigma(t_o), \gamma(t_o)) = \lim_{n\to+\infty} d(\sigma_n(l_n), \gamma(t_o + \varepsilon_n)) = \lim_{n\to+\infty} d(\gamma(t_o + \varepsilon_n), \gamma(t_o + \varepsilon_n)) = 0$$

όπου $l_n = d(p, \gamma(t_o + \varepsilon_n)) \to t_o$.

Αν λοιπόν $v \neq \gamma'(0)$, έχουμε $\sigma \neq \gamma$ και ισχύει το (β). Στην περίπτωση που $v = \gamma'(0)$, δηλαδή $\gamma = \sigma$, έχουμε ότι το $d\exp_p$ είναι ιδιάζον στο $t_o\gamma'(0)$, οπότε το $\gamma(t_o)$ είναι συζυγές του p ως προς την γ. Πράγματι, αν το $d\exp_p$ δεν ήταν ιδιάζον, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης θα υπήρχαν U, V ανοιχτές περιοχές των $t_o\gamma'(0)$ και $\gamma(t_o)$ αντίστοιχα, ώστε η $\exp_p|_U : U \to V$ να ηταν αμφιδιαφόριση. Τότε για αρκετά μεγάλο n θα έχουμε ότι $(t_o + \varepsilon_n)\gamma'(0)$ και $l_n\sigma_n'(0) \in U$. Τότε όμως, $\gamma(t_o + \varepsilon_n) = \exp_p(t_o + \varepsilon_n)\gamma'(0) = \exp_p l_n\sigma_n'(0)$ και επομένως η $\exp_p|_U$ δεν θα ήταν 1-1, το οποίο είναι άτοπο.

(B) Η απόδειξη θα στηριχτεί στον παρακάτω ισχυρισμό.

Ισχυρισμος: Αν υπάρχει s_o ώστε, είτε το $\gamma(s_o)$ να είναι συζυγές του p ως προς την γ, είτε να υπάρχει γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας $\sigma \neq \gamma$ ώστε $\gamma(s_o) = \sigma(s_o)$, τότε η γ έχει cut point, έστω $\gamma(t_o)$, και μάλιστα $t_o \leq s_o$.

Αποδειξη ισχυρισμου: Έστω ότι το $\gamma(s_o)$ είναι συζυγές του p. Επειδή οι γεωδαισιακές δεν ελαχιστοποιούν, ούτε τοπικά, το μήκος μετά το πρώτο συζυγές σημείο, έπεται ότι, για $s > s_o$, $d(\gamma(s), \gamma(0)) < s$ και άρα $t_o \leq s_o$.

Διαφορετικά, έστω $\sigma \neq \gamma$ γεωδαισιακή ώστε $\gamma(s_o) = \sigma(s_o)$. Επίσης, έστω $\varepsilon > 0$ και τ ας είναι μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\sigma(s_o - \varepsilon)$ στο $\gamma(s_o + \varepsilon)$. Τότε, η καμπύλή $\sigma_{|_{[0,s_o-\varepsilon]}} \cup \tau$ ενώνει τα $\gamma(0), \gamma(s_o + \varepsilon)$ και έχει μήκος

$$L(\sigma_{|_{[0,s_o-\varepsilon]}} \cup \tau) = s_o - \varepsilon + L(\tau) < s_o - \varepsilon + 2\varepsilon = s_o - \varepsilon$$

διότι η καμπύλη $\sigma_{|_{[s_o-\varepsilon,s_o]}} \cup \gamma_{|_{[s_o,s_o+\varepsilon]}}$ είναι μια «σπασμένη» γεωδαισιακή που ενώνει τα $\sigma(s_o - \varepsilon)$, $\gamma(s_o + \varepsilon)$ και άρα $L(\tau) < 2\varepsilon = L(\sigma_{|_{[s_o-\varepsilon,s_o]}} \cup \gamma_{|_{[s_o,s_o+\varepsilon]}})$.

Έχουμε λοιπόν ότι $d(\gamma(s_o + \varepsilon), \gamma(0)) < s_o + \varepsilon$, δηλάδή $t_o \leq s_0$.

Επιστρέφοντας τώρα στην απόδειξη του λήμματος, αν t_o είναι το μικρότερο για το οποίο συμβαίνει ένα από τα (α),(β), λόγω του ισχυρισμού, η γ έχει cut point $\gamma(\bar{t}_o)$ για κάποιο $\bar{t}_o \leq t_o$ και για το οποίο, λόγω του (Α) του λήμματος θα ισχύει κάποιο από το (α),(β). Το t_o όμως είναι το ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα και άρα $\bar{t}_o = t_o$, δηλαδή το $\gamma(t_o)$ είναι το cut point του p ως προς την γεωδαισιακή γ. $\square$

Πόρισμα 4.1 *Αν $\gamma(t_o)$ είναι το cut point του $\gamma(0)$ κατά μήκος της γεωδαισιακής γ, τότε το $\gamma(0)$ είναι το cut point του $\gamma(t_o)$ κατά μήκος της $-\gamma$, όπου $-\gamma(t) = \gamma(t_o - t)$.*

Απόδειξη: Αφού το $\gamma(t_o)$ είναι cut point, έπεται ότι ισχύει κάποιο από τα (α),(β) του λήμματος 2. Τότε, όμως, θα ισχύει κάποιο από αυτά και στην περίπτωση του σημείου $\gamma(t_o)$ και της γεωδαισιακής $-\gamma$, (αφού αν το $\gamma(t_o)$ συζυγές του $\gamma(0)$ θα είναι και το $\gamma(0)$ συζυγές του $\gamma(t_o)$) οπότε από το (Β) του λήμματος έπεται ότι το $\gamma(0)$ θα είναι το cut point του $\gamma(t_o)$ κατά μήκος της $-\gamma$. $\square$

Ορισμός 4.3 *Η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη της M είναι το σύνολο*

$$SM = \{v \in TM \ : \ \|v\| = 1\} \subset TM$$

Για κάθε $v \in SM$, ας είναι $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$ η γεωδαισιακή που ορίζεται από την συνθήκη $\gamma_v'(0) = v$. Έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 4.1 *Η συνάρτηση $\varrho : SM \to [0, +\infty]$ που ορίζεται ως:*

$$\varrho(v) = \begin{cases} t_o & \text{αν το } \gamma_v(t_o) \text{ είναι το cut point της } \gamma_v \\ \\ +\infty & \text{αν η } \gamma_v \text{ δεν έχει cut point} \end{cases}$$

είναι συνεχής. Επιπλέον το $C(p)$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: Έστω $v_n, v \in SM$ με $v_n \to v$. Τότε $\gamma_{v_n}(0) \to \gamma_v(0)$. Έστω επίσης t_o^n, t_o η αποστάσεις των cut points από το p ως προς τις γεωδαισιακές γ_{v_n}, γ_v αντίστοιχα, κάποια από τις οποίες ενδεχομένως να είναι $= +\infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι $t_o^n \to t_o$.

1. $\limsup t_o^n \leq t_o$. Έστω $\bar{t} = \limsup t_o^n$ και ας αντικαταστήσουμε την $\{v_n\}$ με κατάλληλη υπακολουθία της ώστε $t_o^n \to \bar{t}$.

   - Έστω ότι $\bar{t} = \infty$. Θα δείξουμε ότι η γ_v είναι ακτίνα, δηλαδή ότι $t_o = +\infty$. Πράγματι, έστω $t \in [0, +\infty)$. Τότε για n αρκετά μεγάλο θα έχουμε $t_o^n \geq t$, αφού $t_o^n \to +\infty$. Επομένως,

     $$d(\gamma_{v_n}(0), \gamma_{v_n}(t)) = t$$

     Τότε, λόγω συνέχειας της d, και επειδή $\gamma_{v_n}(0) \to \gamma_v(0)$, $\gamma_{v_n}(t) \to \gamma_v(t)$, παίρνοντας όρια, έπεται η σχέση $d(\gamma_v(0), \gamma_v(t)) = t$, η οποία τελικά ισχύει για κάθε $t \in [0, +\infty)$ και άρα $t_o = +\infty$, και η πρόταση έχει αποδειχθεί για αυτήν την περίπτωση.

- Έστω ότι $\bar{t} < +\infty$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε:

$$d(\gamma_{v_n}(0), \gamma_{v_n}(t_o^n)) = t_o^n$$

  οπότε παίρνοντας όρια, λόγω της συνέχειας της d, έπεται ότι $d(\gamma_v(0), \gamma_v(\bar{t})) = \bar{t}$ και άρα $\bar{t} \leq t_o$

2. $\liminf t_o^n \geq t_o$. Έστω ότι $\liminf t_o^n < +\infty$, διαφορετικά δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Όμοια με πριν, αν $\bar{t} = \liminf t_o^n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_o^n \to \bar{t}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

   - $\gamma_{v_n}(t_o^n)$ συζυγές του $\gamma_{v_n}(0)$ κατά μήκος της γ_{v_n} για άπειρα n. Σε αυτήν την περίπτωση, επειδή $\gamma_{v_n}(t_o^n) \to \gamma_{v_n}(\bar{t})$ και αφού σημείο συσσώρευσης συζυγών σημείων είναι συζυγές, έπεται ότι το $\gamma_v(\bar{t})$ είναι συζυγές του $\gamma_v(0)$ κατά μήκος της γεωδαισιακής γ_v. Συνεπώς, από το λήμμα 4.2 έπεται ότι $\bar{t} \geq t_o$, δηλαδή $\liminf t_o^n \geq t_o$.
   - Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν άπειρα n για τα οποία το $\gamma_{v_n}(t_o^n)$ να είναι συζυγές του $\gamma_{v_n}(0)$ κατά μήκος της γ_{v_n}, οπότε από το λήμμα 4.2 έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $\{\sigma_n\}$ γεωδαισιακών ώστε $\sigma_n(0) = \gamma_{v_n}(0)$ και $\sigma_n(t_o^n) = \gamma_{v_n}(t_o^n)$. Λόγω τοπικής συμπάγειας της SM, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_n'(0) \to w \in T_{\gamma_v(0)}M$, και έστω $\sigma : [0, +\infty) \to M$ η γεωδαισιακή με $\sigma'(0) = w$. Λόγω συνέχειας θα έχουμε ότι $\sigma(\bar{t}) = \gamma(\bar{t})$. Έχουμε, λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:
     - Αν $\sigma \neq \gamma$, από το λήμμα 4.2 έπεται ότι το cut point της γ_v προκύπτει για $t_o \leq \bar{t}$, δηλαδή $\liminf t_o^n \geq t_o$.
     - Αν $\sigma = \gamma$, επιχειρηματολογώντας όμοια με την αντίστοιχη περίπτωση του λήμματος 4.2, βλέπουμε ότι το $\gamma_v(\bar{t})$ πρέπει να είναι συζυγές του $\gamma_v(0)$ κατά μήκος της γεωδαισιακής γ_v, και κατά συνέπεια έχουμε ότι $t_o \leq \bar{t}$.

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\limsup t_o^n \leq t_o \leq \liminf t_o^n$$

επομένως $t_o = \lim t_o^n$ και η συνάρτηση ϱ είναι συνεχής.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό της πρότασης, αν $\{\gamma_{v_n}(t_o^n)\}$ ακολουθία στο $C(p)$, όπου $v_n \in T_pM$ με $v_n \to v$, από τα παραπάνω, έπεται ότι

$$\gamma_v(t_o) = \lim \gamma_{v_n}(t_o^n) \in C(p)$$

που συνεπάγεται ότι το σύνολο $C(p)$ είναι κλειστό. $\square$

Ορισμός 4.4 *Ορίζουμε το σύνολο* $C_p = \{v \in T_pM \; : \; \|v\| \leq \varrho(\frac{v}{\|v\|})\} \subset T_pM$. *Το σύνορό του,* ∂C_p, *θα το ονομάζουμε εφαπτομενικό cut locus του* p.

Παρατηρήσεις:

1. Αν η M είναι συμπαγής, τότε κάθε γεωδαισιακή από οποιοδήποτε σημείο της M έχει cut point.

2. Αντίστροφα, αν για κάποιο $p \in M$ κάθε γεωδαισιακή έχει cut point τότε η M είναι συμπαγής. Πράγματι, αφού η ϱ είναι συνεχής και $\varrho(v) < +\infty$ για κάθε v στην συμπαγή μοναδιαία σφαίρα του T_pM, έχουμε ότι είναι φραγμένη και επομένως, δεν υπάρχουν ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές οσοδήποτε μεγάλου μήκους από το p, η M δηλαδή είναι συμπαγής.

3. Από την παραπάνω πρόταση έπεται ότι αν $p \in M$ και $C(p) \neq \emptyset$, θα υπάρχει $q \in C(p)$ ώστε $d(p,q) = d(p, C(p))$.

4. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το C_p^o δεν περιέχει συζυγή σημεία, αλλά ούτε cut points, και επομένως η $\exp_{|C_p}$ είναι εμφύτευση. Αν επιπλέον η M είναι συμπαγής, το C_p είναι ομοιομορφικό με μια κλειστή μπάλα, και επιπλέον η M είναι ομοιομορφική με τον χώρο που προκύπτει μετά από κατάλληλες ταυτίσεις σημείων του σύνορου αυτής της μπάλας.

5. Αν για κάποιο $p \in M$, $C(p) = \{q\}$, η M είναι ομοιομορφική με την σφαίρα αντίστοιχης διάστασης.

   Πράγματι, αν για κάποιο $v \in SM \cap T_pM$ $\varrho(v) < +\infty$, τότε $\varrho(v) = \pi r_o$ για κάποιο $r_o > 0$ και μάλιστα $d(p,q) = \pi r_o$. Από την συνέχεια της ϱ προκύπτει ότι $\varrho(v) = d(p,q) = \pi r_o$ για κάθε $v \in SM \cap T_pM$.

   Αν λοιπόν, $S^n_{r_o}$ η σφαίρα ακτίνας r_o και διάστασης n, $\bar{p}, \bar{q}$ δυο αντιδιαμετρικά σημεία, και $I : T_pM \to T_{\bar{p}}S_{r_o}$ μια ισομετρία, τότε η απεικόνιση:

   $$\phi \equiv \exp_{\bar{p}} \circ I \circ \left(\exp_p|_{B_{\pi r_o}}\right)^{-1} : M - \{q\} \to S^n_{r_o} - \{\bar{q}\}$$

   όπου $B_{\pi r_o}$ η ανοιχτή μπάλα ακτίνας πr_o με κέντρο το 0 στον εφαπτόμενο χώρο T_pM, είναι ομοιομορφισμός, ο οποίος επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό μεταξύ των M και $S^n_{r_o}$ θέτοντας $\phi(q) = \bar{q}$.

4.2 Η injectivity radius

Ορισμός 4.5 *Ως injectivity radius της M , που θα συμβολίζουμε με $i(M)$, ορίζουμε το μεγαλύτερο $r \in [0, +\infty]$ ώστε, για όλα τα σημεία $p \in M$, η $\exp_p$ να είναι εμφύτευση της ανοιχτής μπάλας $B_r(0) \subset T_pM$ στην M. Δηλαδή,*

$$i(M) = \inf\{\|v\| \ : \ v \in \partial C_p, p \in M\}$$

Αν η πολλαπλότητα M είναι συμπαγής, τότε έχουμε

$$i(M) = \min\{\|v\| \ : \ v \in C_p, p \in M\}$$

και επιπλέον από την συνέχεια της d έπεται ότι υπάρχει $p \in M$ ώστε $d(p, C(p)) = i(M)$. Μάλιστα, από την παρατήρηση 3, έχουμε ότι υπάρχουν $p, q \in M$ ώστε $d(p, q) = i(M)$, με $q \in C(p)$.

Για την περίπτωση που έχουμε ένα ζεύγος $p, q \in M$ όπως στην παρατήρηση 3, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.3 *Έστω $p \in M$ με $C(p) \neq \emptyset$ και $q \in M$ τέτοιο ώστε $d(p, q) = d(p, C(p)) = t_o$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι δεν υπάρχει γεωδαισιακή από το p ώστε το q να είναι συζυγές του p κατά μήκος της. Τότε, υπάρχουν ακριβώς δυο διαφορετικές ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές από το p στο q, γ, σ, για τις οποίες μάλιστα έχουμε $\gamma'(t_o) = -\sigma'(t_o)$.*

Απόδειξη: Από το λήμμα 4.2 έπεται ότι υπάρχουν δυο γεωδαισιακές γ, σ όπως απαιτεί το παρόν λήμμα. Μένει να αποδείξουμε ότι $\gamma'(t_o) = -\sigma'(t_o)$, από όπου έπεται ότι δεν θα υπαρχει άλλη ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από p στο q.

Ας υποθέσουμε ότι $\gamma'(t_o) \neq -\sigma'(t_o)$. Θα υπάρχει τότε ένα $v \in T_qM$ ώστε

$$\langle v, -\gamma'(t_o)\rangle, \langle v, -\sigma'(t_o)\rangle > 0$$

και έστω τ η γεωδαισιακή με $\tau'(0) = v$.

Η υπόθεση ότι το q δεν είναι συζυγές του p ως προς την γ ή σ, εξασφαλίζει ότι για μικρά $s \geq 0$ υπάρχουν δυο μονοπαραμετρικές (ομαλές) οικογένειες γεωδαισιακών $\{\gamma_s\}, \{\sigma_s\}$ όπου για κάθε s οι γ_s, σ_s είναι γεωδαισιακές που ενώνουν το p με το $\tau(s)$, και επιπλέον $\gamma_0 = \gamma$ και $\sigma_0 = \sigma$.

Κάνοντας χρήση του τύπου για την πρώτη παράγωγο του μήκους για τις οικογένειες $\{\gamma_s\}, \{\sigma_s\}$ έχουμε:

$$\frac{d}{ds}L(\gamma_s)|_{s=0} = \langle v, \gamma'(t_o)\rangle < 0$$
$$\frac{d}{ds}L(\sigma_s)|_{s=0} = \langle v, \sigma'(t_o)\rangle < 0$$

Επομένως, για s_o αρκετά μικρό έχουμε ότι $L(\gamma_{s_o}) \leq L(\sigma_{s_o}) < L(\gamma) = L(\sigma)$, και οι $\gamma_{s_o}, \sigma_{s_o}$ είναι δυο διαφορετικές γεωδαισιακές από το p στο $\tau(s)$. Από την απόδειξη του (B) του λήμματος 4.2, έπεται λοιπόν ότι η σ_{s_o} έχει cut point σε απόσταση από το p μικρότερη από $L(\sigma_{s_o}) < L(\gamma)$. Καταλλήγουμε λοιπόν σε αντίφαση, αφού το q είναι το πλησιέστερο στο p σημείο του $C(p)$. $\square$

Ουσιαστικά, η injectivity radius ξεχωρίζει σε γενικές γραμμές τοπικές από ολικές καταστάσεις σε μια πλήρη πολλαπλότητα Riemann M, αφού για $r < i(M)$ η $\exp_p|_{B_r}$ είναι εμφύτευση για κάθε $p \in M$.

Γι'αυτό μας ενδιαφέρει να μπορούμε να έχουμε κάποια εκτίμηση γι'αυτήν κάτω από κατάλληλους περιορισμούς για την καμπυλότητά της.

Προς αυτήν την κατεύθυνση έχουμε το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο οφείλεται στον Klingenberg.

Πόρισμα 4.2 *Έστω $K \geq K_M \geq H > 0$, για μια πλήρη πολλαπλότητα Riemann M, όπου K_M η sectional καμπυλότητά της. Τότε:*

$$i(M) \geq \min\left\{\frac{\pi}{\sqrt{K}}, \frac{1}{2}(\textit{μήκος της μικρότερης ομαλής γεωδαισιακής στην } M)\right\}$$

Απόδειξη: Ξεκινώντας ας παρατηρήσουμε ότι αφού $K_M \geq H > 0$, η M είναι συμπαγής και επομένως υπάρχουν $p, q \in M$, με $q \in C(p)$, ώστε $d(p,q) = i(M)$. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής περιπτώσεις:

1. Το q είναι συζυγές του p κατά μήκος κάποιας ελαχιστοποιούσας γεωδαισιακής. Τότε, λόγω της $K \geq K_M$, η σύγκριση, μέσω του θεωρήματος του Rauch, με την σφαίρα $S^n_{\frac{1}{\sqrt{K}}}$ σταθερής καμπυλότητας K δίνει ότι $i(M) = d(p,q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

2. Έστω ότι το q δεν είναι συζυγές του p ως προς κάποια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή που να τα ενώνει. Τότε, επειδή $d(p,q) = i(M)$, το q είναι το πλησιέστερο στο p σημείο του $C(p)$, και άρα, από το λήμμα 4.3, υπάρχουν δυο ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές γ, σ με $\gamma(t_o) = \sigma(t_o)$, $\gamma(t_o) = \sigma(t_o) = q$ και $\gamma'(t_o) = -\sigma'(t_o)$, όπου $t_o = i(M)$.

   Επίσης, επειδή $q \in C(p)$, θα έχουμε, από το πόρισμα 1, και ότι $p \in C(q)$. Επιπλέον, το p, δεν είναι συζυγές του q, και επειδή $d(p,q) = i(M)$, είναι το πλησιέστερο στο q σημείο του $C(q)$. Με εφαρμογή του λήμματος 4.3 λοιπόν, έχουμε ότι $\gamma'(0) = -\sigma'(0)$.

   Από τα παραπάνω έπεται ότι οι γ και σ σχηματίζουν μια ομαλή κλειστή γεωδαισιακή με μήκος $2i(M) = 2d(p,q)$. Συνεπώς

   $$i(M) \geq \frac{1}{2}(\text{μήκος της μικρότερης κλειστής, ομαλής γεωδαισιακής στην } M) = l$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι η $i(M)$ θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από κάποιο από τα $\frac{\pi}{\sqrt{K}}, l$, έχουμε δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Στην περίπτωση που έχουμε μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα M, άρτιας διάστασης, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1 *(Klingenberg) Έστω M μια προσανατολίσιμη πλήρης πολλαπλότητα Riemann, άρτιας διάστασης με $K \geq K_M > 0$. Τότε, αν υπάρχουν $p \in M$ και $q \in C(p)$ ώστε $d(p,q) = i(M)$, το q είναι συζυγές του p. Επομένως, $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.*

Απόδειξη: Έστω p και q όπως στην υπόθεση του θεωρήματος, και ας υποθέσουμε ότι το q δεν είναι συζυγές του p. Όπως στην απόδειξη του πόρισματος 2 λοιπόν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ομαλή, κλειστή γεωδαισιακή γ, μοναδιαίας ταχύτητας με $\gamma(0) = \gamma(l) = p$, και $l = L(\gamma) = 2i(M)$.

Έστω $P_\gamma : T_pM \to T_pM$ η παράλληλη μετατόπιση κατά l, πάνω στην γ. Η P_γ είναι ισομετρία, και επειδή η M είναι προσανατολίσιμη, διατηρεί τον προσανατολισμό. Επιπλέον, επειδή η γ είναι ομαλή κλειστή γεωδαισιακή, $P_\gamma(\gamma'(0)) = \gamma'(l) = \gamma'(0)$, διατηρεί επομένως αναλλοίωτο τον κάθετο στο $\gamma'(0)$ υπόχωρο N του T_pM. Περιορίζοντας λοιπόν την P_γ στον N, έχουμε την ισομετρία $P_\gamma|_N : N \to N$. Αφού αυτή διατηρεί τον προσανατολισμό, και η διάσταση του N είναι περιττή, υπάρχει $v \in N$ ώστε $P_\gamma(v) = v$.

Έστω, λοιπόν, V το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του v επί της γ. Επειδή $V(l) = P_\gamma(v) = v = V(0)$, το V είναι ομαλό. Επομένως, υπάρχει μια ομαλή μεταβολή $\{h_s\}$ της γ, όπου οι h_s είναι κλειστές καμπύλες, με πεδίο μεταβολής V(για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την μεταβολή $h_s(t) = \exp_{\gamma(t)} sV(t)$).

Ο τύπος για την δεύτερη παράγωγο του μήκους για την μεταβολή $\{h_s\}$ δίνει:

$$\begin{array}{lcll} \frac{d^2}{ds^2}L(h_s)_{|s=0} & = & \int_0^l \left(\langle \nabla_{\gamma'}V, \nabla_{\gamma'}V\rangle - \langle R(\gamma', V)V, \gamma'\rangle\right) dt & = \\ & = & -\int_0^l K_M(V, \gamma')dt & < 0 \end{array}$$

αφού $\nabla_{\gamma'}V = 0$ και $K_M(V, \gamma') = \frac{\langle R(\gamma', V)V, \gamma'\rangle}{|\gamma' \wedge V|^2} > 0$.

Συνεπώς, η συνάρτηση $L(h_s)$ έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο για $s = 0$, δηλαδή $L(h_s) < L(\gamma)$ για $|s| > 0$ μικρό.

Έστω $q_s = h_s(t_s)$ ένα σημείο στην h_s ώστε η $d(h_s(0), q_s)$ να είναι μέγιστη, και έστω σ_s μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το q_s στο $h_s(0)$, η οποία ουσιαστικά είναι μοναδική, αφού $d(h_s(0), q_s) \leq \frac{L(h_s)}{2} < i(M)$. Για τον ίδιο λόγο, το q_s δεν είναι συζυγές του $h_s(0)$. Τότε:

- $\sigma_s'(0) \perp h_s'(t_s)$. Πράγματι, αφού

  $$d(h_s(0), h_s(t_s)) < i(M)$$

  έπεται ότι $h_s \subset M - C(h_s(0))$ και κατά συνέπεια, επειδή η $\exp_{h_s(0)}|_{C^o_{h_s(0)}}$ είναι εμφύτευση, υπάρχει ομαλή καμπύλη $\tilde{h}_s \subset C^o_{h_s(0)}$ ώστε $\exp_{h_s(0)}(\tilde{h}_s) = h_s$, και $\tilde{h}_s$ κλειστή, ομαλή καμπύλη. Μάλιστα, θα έχουμε ότι:

  $$\sigma_s(t) = \exp_{h_s(0)}\left(\tilde{h}_s(t_s) - t\frac{\tilde{h}_s(t_s)}{\|\tilde{h}_s(t_s)\|}\right)$$

  Τότε, η μεταβολή $\{\sigma_s^\varepsilon\}$ της σ_s που ορίζεται ως

  $$\sigma_s^\varepsilon(t) = \exp_{h_s(0)}\left(\tilde{h}_s(t_s + \varepsilon) - t\frac{\tilde{h}_s(t_s + \varepsilon)}{\|\tilde{h}_s(t_s + \varepsilon)\|}\right)$$

είναι ομαλή και οι σ_s^ε είναι ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές από το $h_s(t_s+\varepsilon)$ στο $h_s(0)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο για την πρώτη παράγωγο του μήκους γι'αυτήν την μεταβολή, και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι το $L(\sigma_s^0)$ είναι μέγιστο, έπεται ότι:

$$\langle h_s'(t_s), \sigma_s'(0)\rangle = 0$$

Επομένως, $\sigma_s'(0) \perp h_s'(t_s)$.

- $\lim_{s\to 0} q_s = q$. Πράγματι, έστω $q' = \lim_n q_{s_n} \in h_0 = \gamma$ για κάποια ακολουθία $s_n \to 0$. Από τον τρόπο που επιλέχθηκαν τα σημεία q_s έπεται ότι για κάθε t:

$$d(h_{s_n}(0), h_{s_n}(t)) \leq d(h_{s_n}(0), q_{s_n})$$

Οπότε, λόγω συνέχειας, παίρνοντας όρια έχουμε:

$$d(p, \gamma(t)) \leq d(p, q')$$

Εχουμε λοιπόν ότι το q' είναι εκείνο το σημείο της γ που βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από το p. Επειδή το q είναι το μοναδικό με αυτή την ιδιότητα, έπεται ότι $q' = q$.

Συνεχίζοντας, λόγω της τοπικής συμπάγειας της SM, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in T_qM$ σημείο συσσώρευσης του $\{\sigma_s'(0)\} \subset SM$ και έστω σ η γεωδαισιακή από το q με $\sigma'(0) = w$. Εφόσον οι σ_s είναι ελαχιστοποιούσες, λόγω συνέχειας, έπεται ότι και η σ θα είναι ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το q στο p. Επιπλέον, από την συνέχεια έπεται και ότι $\sigma'(0) \perp \gamma'(\frac{l}{2})$, και επομένως δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα δυο τμήματα της γ που ενώνουν το p με το q.

Τελικά, αφού για το q έχουμε ότι $d(p,q) = d(p, C(p))$ από το λήμμα 4.3 έπεται ότι το q θα είναι συζυγές του p ως προς την γ. Κατά συνέπεια $i(M) = d(p,q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.

Θεώρημα 4.2 *(Synge) Έστω M μια συμπαγής, προσανατολίσιμη πολλαπλότητα Riemann, άρτιας διάστασης με $K \geq K_M > 0$. Τότε η M είναι απλά συνεκτική.*

Απόδειξη: Θα ξεκινήσουμε την απόδειξη αποδεικνύοντας τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμος: Αν η M είναι συμπαγής τότε κάθε μη τετριμμένη, ελεύθερη κλάση ομοτοπίας βρόγχων περιέχει μια ομαλή κλειστή γεωδαισιακή, η οποία έχει το ελάχιστο μήκος ανάμεσα στους βρόγχους αυτής της κλάσης.

Αποδειξη ισχυρισμου: Έστω $\mathfrak{L}$ μια μη τετριμμένη κλάση ομοτοπίας βρόγχων, και $l > 0$ το infimum των μηκών των βρόγχων της $\mathfrak{L}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι καμπύλες σε αυτήν την κλάση ορίζονται στο διάστημα $[0,1]$ και ότι είναι παραμετρησμένες ανάλογα με το μήκος τόξου. Έστω

$\varepsilon > 0$ και ας θεωρήσουμε μια διαμέριση $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = 1$ του $[0,1]$, τέτοια ώστε:

$$t_{i+1} - t_i < \frac{i(M)}{l+\varepsilon}$$

Τότε, για κάθε καμπύλη $\gamma \in \mathfrak{L}$ με $L(\gamma) < l + \varepsilon$ θα έχουμε ότι:

$$L(\gamma_{|_{[t_i,t_{i+1}]}}) < (t_{i+1} - t_i)(l+\varepsilon) < i(M)$$

επομένως για κάθε i το τμήμα $\gamma_{|_{[t_i,t_{i+1}]}}$ βρίσκεται σε περιοχή του $\gamma(t_i)$ στην οποία η $\exp_{\gamma(t_i)}$ είναι αμφιδιαφόριση. Κατα συνέπεια, είναι ομοτοπικό με το μοναδικό ελαχιστοποιούν γεωδαισιακό τμήμα που συνδέει τα $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})$. Κατ'επέκταση, η καμπύλη γ είναι ομοτοπική με τον βρόγχο $\sigma : [0,1] \to M$, όπου:
$\sigma(t_i) = \gamma(t_i)$ για κάθε i, και $\sigma_{|_{[t_i,t_{i+1}]}}$ το γεωδαισιακό τμήμα ελάχιστου μήκους που συνδέει τα $\gamma(t_i)$ και $\gamma(t_{i+1})$.

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι για $\varepsilon > 0$ μικρό, υπάρχει ακολουθία $\sigma_j \in \mathfrak{L}$ κατα τμήματα ομαλών γεωδαισιακών βρόγχων, με $L(\sigma_j) \to l$. Λόγω της συμπάγειας της M, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι για κάθε i υπάρχει α_i ώστε $\gamma_j(t_i) \to \alpha_i$.

Τότε, λόγω της τοπικής συμπάγειας της SM, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{j_n}\}$ βρόγχων η οποία να συγκλίνει, και μάλιστα ομοιόμορφα, σε έναν κατά τμήματα ομαλό βρόγχο $\sigma : [0,1] \to M$, τέτοιο ώστε $\sigma(t_i) = \alpha_i$ και $\sigma_{|_{[t_i,t_{i+1}]}}$ να είναι το μοναδικό γεωδαισιακό τμήμα ελαχίστου μήκους, που συνδέει τα α_i, α_{i+1}. Κατά συνέπεια ο βρόγχος σ είναι μια κατά τμήματα ομαλή κλειστή γεωδαισιακή με μήκος l.

Μάλιστα, ο βρόγχος $\sigma \in \mathfrak{L}$ και επειδή έχει ελάχιστο μήκος θα πρέπει να είναι μια ομαλή κλειστή γεωδαισιακή.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα διανυσματικό πεδίο V όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 4.1, και να θεωρήσουμε την αντίστοιχη μεταβολή. Τότε, με εφαρμογή του τύπου για την δεύτερη παράγωγο του μήκους, βλέπουμε ότι θα υπάρχει μια κλειστή καμπύλη, ομοτοπική με την σ, με μήκος μικρότερο του l, το οποίο οδηγεί σε αντίφαση. $\square$

Θεώρημα 4.3 *(Klingenberg). Έστω M απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, με $\dim M \geq 3$ τέτοια ώστε $K \geq K_M \geq H > \frac{1}{4}K > 0$. Τότε $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$.*

Απόδειξη: Λόγω του πορίσματος 4.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε κλειστή γεωδαισιακή έχει μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Έστω, λοιπόν, ότι υπάρχει μια, όχι απαραίτητα ομαλή, γεωδαισιακή με μήκος γνήσια μικρότερο του $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

Τότε, επειδή η M είναι απλά συνεκτική, υπάρχει μια ομοτοπία H_s με $H_0 \equiv \gamma(0)$ και $H_1 = \gamma$. Μπορούμε μάλιστα να υποθέσουμε ότι οι καμπύλες H_s είναι ορισμένες στο διάστημα $[0,1]$ και με παραμέτρηση ανάλογη με το μήκος τόξου.

Ισχυρισμος: Κάθε γεωδαισιακή στον $\Omega(p,p)$, τον χώρο των κλειστών καμπύλων από το p στο p, με μήκος μεγαλύτερο $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ έχει δείκτη μεγαλύτερο ή ίσο του $n-1 \geq 2$.

Αποδειξη ισχυρισμου: Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.5 για να συγκρίνουμε με την σφαίρα καμπυλότητας H, προκύπτει ότι κάθε γεωδαισιακή στον $\Omega(p,p)$ με μήκος μεγαλύτερο του $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$ θα έχει δείκτη μεγαλύτερο ή ίσο από τον δείκτη γεωδαισιακής με μήκος $\geq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ σε αυτήν τη σφαίρα. Όμως στην σφαίρα, κάθε τέτοια γεωδαισιακή έχει δείκτη $n-1$, αφού περιέχει τουλάχιστον ένα συζυγές σημείο πολλαπλότητας $n-1$.

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ομοτοπία H_s, με μια άλλη, ώστε για κάποιο $\varepsilon_1 > 0$:

$$L(H_s) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - 2\varepsilon_1$$

Αυτό θα γίνει χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.8. Έχουμε ότι

$$\max\{L(H_0), L(H_1)\} = L(\gamma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - \varepsilon$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$. Επίσης, από τον ισχυρισμό έπεται ότι η μεγαλύτερη κρίσιμη τιμή με δείκτη μηδέν ή ένα είναι μικρότερη ή ίση από $\frac{\pi}{\sqrt{H}} < \frac{2\pi}{\sqrt{K}}$. Επομένως, από την πρόταση, για κάθε $\bar{\varepsilon} > 0$, υπάρχει ομοτοπία, την οποία θα συμβολίζουμε επίσης με H_s, ώστε

$$L(H_s) \leq \max\left\{\frac{\pi}{\sqrt{H}}, \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - \varepsilon\right\} + \bar{\varepsilon}$$

Επιλέγοντας το $\bar{\varepsilon}$ αρκετά μικρό θα έχουμε:

$$L(H_s) \leq \max\left\{\frac{\pi}{\sqrt{H}}, \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - \varepsilon\right\} + \bar{\varepsilon} < \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - 2\varepsilon_1$$

για κάποιο $\varepsilon_1 > 0$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η γ μπορεί να ανυψωθεί μέσω της $\exp_{\gamma(0)}$ σε μια κλειστή καμπύλη στον $T_{\gamma(0)}M$. Γνωρίζουμε ότι για μικρά s, οι καμπύλες H_s βρίσκονται μέσα σε μια κανονική περιοχή του $\gamma(0)$, οπότε πράγματι ανυψώνονται σε κλειστές καμπύλες. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το σύνολο των $s \in [0,1]$ για τα οποία οι H_s ανυψώνονται σε κλειστές καμπύλες στην ανοιχτή μπάλα $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0) \in T_{\gamma(0)}M$ είναι κλειστό και ανοιχτό ταυτόχρονα.

Έστω λοιπόν ακολουθία $s_n \to s_o$ ώστε οι H_{s_n} να έχουν ανύψωση $\tilde{H}_{s_n} \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$, με τις $\tilde{H}_{s_n}$ να είναι κλειστές καμπύλες. Τώρα, για κάθε n

$$L_{a,b}(\tilde{H}_{s_n}) = \int_a^b \|\tilde{H}'_{s_n}(t)\| dt = \int_a^b \|((d\exp_{\gamma(0)})_{\tilde{H}_{s_n}(t)})^{-1}(H'_{s_n}(t))\| dt \leq$$

$$\leq \sup\left\{\|((d\exp_{\gamma(0)})_w)^{-1}\| \;:\; w \in \overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)}\right\}\int_a^b \|H'_{s_n}(t)\|dt =$$

$$= \sup\left\{\|((d\exp_{\gamma(0)})_w)^{-1}\| \;:\; w \in \overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)}\right\} L_{a,b}(H_{s_n}) <$$

$$< A\left(\frac{2\pi}{\sqrt{K}} - 2\varepsilon_1\right)(b-a)$$

όπου $A = \sup\left\{\|((d\exp_{\gamma(0)})_w)^{-1}\| \;:\; w \in \overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)}\right\} < +\infty$ επειδή στην κλειστή μπάλα $\overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)}$, η $\exp_{\gamma(0)}$ δεν έχει ιδιάζοντα σημεία(Rauch I). Από την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι η οικογένεια $\{\tilde{H}_{s_n}\}$ είναι ισοσυνεχής. Επιπλέον, επειδή $H_{s_n} \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$ έπεται ότι για κάθε t το σύνολο

$$\overline{\{H_{s_n}(t)\}}$$

είναι συμπαγές. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα Ascoli προκύπτει ότι υπάρχει μια υπακολουθία $\{H_{s_{k_n}}\}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια κλειστή καμπύλη $\tilde{H}_{s_o}$, η οποία λόγω της συνέχειας της $\exp_{\gamma(0)}$ ανυψώνει την H_{s_o}. Επίσης, έχουμε ότι $\tilde{H}_{s_o} \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$. Διαφορετικά, λόγω του λήμματος του Gauss, θα υπήρχαν $t_0 < t_1$ ώστε $\tilde{H}_{s_o}(t_0), \tilde{H}_{s_o}(t_1) \in \partial B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$ και:

$$\int_0^{t_0} \|(\tilde{H}'_{s_o}(\tau)_r\|d\tau + \int_{t_1}^1 \|(\tilde{H}'_{s_o}(\tau)_r\|d\tau \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - 2\varepsilon_1$$

όπου με $(.)_r$ συμβολίζουμε την ακτινική συνιστώσα του διανύσματος.

Τώρα, επειδή $\|(\tilde{H}'_{s_o})_r\| \leq \|H'_{s_o}\|$, έχουμε ότι $L(H_{s_o}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K}} - 2\varepsilon_1$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τον τρόπο που επιλέξαμε την ομοτοπία.

Μένει τώρα να δείξουμε ότι το σύνολο των $s \in [0,1]$ για τα οποία οι H_s ανυψώνονται σε κλειστές καμπύλες στην ανοιχτή μπάλα $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$ είναι ανοιχτό. Έστω λοιπόν, H_{s_o} μια καμπύλη με τέτοια ανύψωση. Εφόσον $K_M \leq K$, από το θεώρημα τού Rauch έπεται ότι η ανοιχτή μπάλα $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$ δεν περιέχει κρίσιμα σημεία, και επομένως η $\exp_{\gamma(0)}|_{B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)}$ είναι τοπική αμφιδιαφόριση. Επομένως, για s αρκετά κοντά στο s_o, η H_s ανυψώνεται σε μια κλειστή καμπύλη μέσα στην $B_{\frac{\pi}{\sqrt{K}}-\varepsilon_1}(0)$.

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $s \in [0,1]$ η H_s ανυψώνεται μέσω της εκθετικής απεικόνισης σε κλειστή καμπύλη, άρα και η γ έχει μια τέτοια ανύψωση. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι κάθε γεωδαισιακή από το $\gamma(0)$ ανυψώνεται μοναδικά σε ακτίνες στον εφαπτόμενο χώρο. $\square$

Παρατήρηση: Αν η M δεν είναι προσανατολίσιμη τότε γνωρίζουμε ότι θα υπάρχει ένας προσανατολίσιμος χώρος επικάλυψης με δυο καλύματα, το double cover της M [3, σελ 34]. Επομένως μια απλά συνεκτική πολλαπλοτητα θα είναι αναγκαστικά προσανατολίσιμη, οπότε, λόγω του θεωρήματος (3.2), η υπόθεση της προσανατολισιμότητας στο θεώρημα (3.1) είναι ισοδύναμη με την απλή συνεκτικότητα.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι για απλά συνεκτικές πολλαπλότητες, στην περίπτωση άρτιας διάστασης, το θεωρήμα (3.1) δίνει την επιθυμητή εκτίμηση για την injectivity radius, χωρίς την επιπλέον υπόθεση $K \geq K_M \geq \frac{K}{4}$. Σε περιττή δίασταση όμως, ο Berger [5, σελ 70], με ένα παράδειγμα δείχνει ότι αν $K_M \not\geq \frac{K}{9}$ ένα τέτοιο θεώρημα δεν μπορεί να ισχύει, ενώ είναι άγνωστο κατά πόσον η υπόθεση του (3.2) είναι η ασθενέστερη δυνατή.

Κεφάλαιο 5

Το τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας

Το τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας ανήκει σε μια ευρύτερη κλάση αποτελεσμάτων στα οποία κάποιες ασθενείς υποθέσεις για την τοπολογία μιας πολλαπλότητας, μαζί με περιορισμούς που αφορούν την τοπική έννοια της sectional ή Ricci καμπυλότητας αλλά πολλές φορές και την διάμετρο ή τον όγκο της είναι ικανές να καθορίσουν πλήρως τον τύπο της πολλαπλότητας, ως προς ομοιομορφισμό, αμφιδιαφόριση ή και ισομετρία. Το γνωστό θεώρημα των Hadamard-Cartan για παράδειγμα φανερώνει την επίδραση της καμπυλότητας στην τοπολογία μιας πολλαπλότητας.

Ειδικότερα, ενδιαφέρον είναι το ερώτημα αν τέτοιου είδους περιορισμοί μπορούν να εξασφαλίσουν ότι μια πολλαπλότητα είναι σφαίρα. Μάλιστα, αποτελέσματα προς αυτήν την κατεύθυνση εμφανίζονται και στην γεωμετρία επιφανειών όπου ο H.Liebmann το 1899 απέδειξε ότι μια συμπαγής, συνεκτική κανονική επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss K είναι ισομετρική με σφαίρα [4, σελ. 317], ενώ με εφαρμογή του θεωρήματος Gauss-Bonnet αποδεικνύεται ότι κάθε συμπαγής, προσανατολίσιμη γεωμετρική επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K > 0$ είναι αναγκαστικά αμφιδιαφορική με σφαίρα.

Στην συνέχεια αποδεικνύεται το τοπολογικό θεώρημα της σφαίρας καθώς και το θεώρημα μεγιστικής διαμέτρου του Toponogov, το οποίο επίσης κινείται προς την ίδια κατεύθυνση αλλά με την υπόθεση του pinching να αντικαθίσταται κατά κάποιο τρόπο από εναν περιορισμό για την διάμετρο.

5.1 Το θεώρημα της σφαίρας

Λήμμα 5.1 *Έστω M μια συμπαγής πολλαπλότητα Riemann. Έστω $p \in M$ και έστω $q \in M$ τέτοιο ώστε η απόσταση $d(p,q)$ να είναι μέγιστη. Τότε, για κάθε $v \in T_qM$ υπάρχει ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή γ από το q στο p τέτοια ώστε $\sphericalangle(\gamma'(0), v) \leq \frac{\pi}{2}$.*

Απόδειξη: Έστω σ μια γεωδαισιακή από το q με $\sigma'(0) = v$.

Ισχυρισμος: Υπάρχει μια ακολουθία $\{q_n = \sigma(t_n)\}$ σημείων στην σ, και ακολουθία γεωδαισιακών $\{\gamma_n\}$, όπου γ_n ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας από το q_n στο p, ώστε $q_n \to q$ και $\sphericalangle(\gamma_n'(0), \sigma'(t_n)) \leq \frac{\pi}{2}$.

Αποδειξη ισχυρισμου: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $t_o > 0$ ώστε για όλα τα $t \in (0, t_o)$ και για κάθε ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή γ_t από το $\sigma(t)$ στο p να έχουμε $\sphericalangle(\gamma_t'(0), \sigma'(t)) > \frac{\pi}{2}$.

Έστω $t \in (0, t_o)$ και $\{c_s\}$ μια ομαλή οικογένεια καμπυλών, ώστε η c_s να είναι μια ομαλή καμπύλη από το $\sigma(t-s)$ στο p και $c_0 = \gamma_t$. Εφαρμόζοντας τον τύπο για την πρώτη παράγωγο του μήκους έχουμε:

$$\frac{d}{ds} L(c_s) \mid_{s=0} = \langle \gamma_t'(0), \sigma'(t) \rangle < 0$$

Τώρα, επειδή $d(p, \sigma(t-s)) \leq L(c_s)$ και $\frac{d}{ds} L(c_s) \mid_{s=0} < 0$, έπεται ότι η συνάρτηση $t \mapsto d(p, \sigma(t))$ είναι γνησίως αύξουσα καθώς το t αυξάνεται από το 0 στο t_o, και άρα, για κάποιο t, $d(p, \sigma(t)) > d(p, q)$ το οποίο οδηγεί σε αντίφαση.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $\{\gamma_n\}$ είναι μια ακολουθία γεωδαισιακών όπως στον ισχυρισμό. Επειδή $q_n \to q$, λόγω της τοπικής συμπάγειας της SM μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\gamma_n \to \gamma$, όπου η γ είναι γεωδαισιακή από το q στο p, η οποία, λόγω συνέχειας, θα είναι ελαχιστοποιούσα και επιπλέον $\sphericalangle(\gamma'(0), v) \leq \frac{\pi}{2}$. $\square$

Λήμμα 5.2 *Έστω ότι για μια πλήρη πολλαπλότητα Riemann M, $K_M \geq H > 0$ και έστω ότι $d(M) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$. Τότε αν $p, q \in M$ με $d(p,q) = d(M)$ έχουμε ότι:*

$$M = \overline{B_{\frac{\pi}{2\sqrt{H}}}(p)} \cup \overline{B_{\frac{\pi}{2\sqrt{H}}}(q)}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμος: Έστω $(\gamma_1, \gamma_2, \alpha)$ μια γωνία στην M με $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $l_i = L(\gamma_i) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ και γ_i ελαχιστοποιούσες. Τότε $d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2)) < \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$.

Αποδειξη Ισχυρισμου: Από το θεώρημα του Toponogov, αν $(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\alpha})$ η αντίστοιχη γωνία στην 2-σφαίρα καμπυλότητας H, θα έχουμε ότι:

$$d(\gamma_1(0), \gamma_2(l_2) \leq d(\bar{\gamma}_1(0), \bar{\gamma}_2(l_2))$$

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μόνο για την περίπτωση που η πολλαπλότητα είναι η 2-σφαίρα καμπυλότητας H. Επίσης, από το βήμα (1) της απόδειξης του θεωρήματος του Toponogov, αρκεί να τον αποδείξουμε για $\alpha = \frac{\pi}{2}$, οπότε ο ισχυρισμός γίνεται προφανής.

Για την απόδειξη του λήμματος, έστω p, q σε μέγιστη απόσταση και έστω $x \in M$ το οποίο δεν ανήκει στην $\overline{B_{\frac{\pi}{2\sqrt{H}}}(p)}$, δηλαδή $d(p,x) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$. Έστω γ_1,γ_2 ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακες από το x στο p και από το p στο q αντίστοιχα. Από το λήμμα 5.1, μπορούμε να διαλέξουμε την γ_2 έτσι ώστε $\sphericalangle(-\gamma_1'(l_1), \gamma_2'(0)) \leq \frac{\pi}{2}$. Τότε, $L(\gamma_i) > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, οπότε από τον παραπάνω ισχυρισμό έπεται ότι $d(x,q) < \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, δηλαδή $x \in B_{\frac{\pi}{2\sqrt{H}}}(q)$. $\square$

Λήμμα 5.3 *Έστω ότι* $1 \geq K_M \geq H > \frac{1}{4}$ *και* $p, q \in M$ *τέτοια ώστε* $d(p,q) = d(M)$. *Τότε, σε κάθε γεωδαισιακή* γ*(μοναδιαίας ταχύτητας) από το* p *υπάρχει μοναδικό σημείο* r *τέτοιο ώστε* $d(p,r) = d(q,r) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$.

Απόδειξη: Λόγω της υπόθεσης $H > \frac{1}{4}$ και των θεωρημάτων 4.1, 4.3, έχουμε ότι $d(M) \geq i(M) \geq \pi > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, και άρα $d(p, \gamma(t)) = t$ για $0 \leq t \leq \pi$. Ειδικότερα, $d(p, \gamma(\pi)) = \pi > \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, και επομένως, από το λήμμα 5.2 έπεται ότι $d(q, \gamma(\pi)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(t) = d(q, \gamma(t)) - d(p, \gamma(t))$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f(0) = d(q,p) > 0$ και $f(\pi) = d(q, \gamma(\pi)) - d(p, \gamma(\pi)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}} - \pi < 0$. Τελικά, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι υπάρχει $r = \gamma(t_o)$ για κάποιο $t_o \in (0, \pi)$ ώστε $d(q,r) = d(p,r) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$ (η ανισότητα προκύπτει από το λήμμα 5.2).

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πάνω στην γ σημεία $r_1 \neq r_2$ που ισαπέχουν από τα p, q με $d(p, r_1) < d(p, r_2)$. Τότε:

$$d(q, r_2) = d(p, r_2) = d(p, r_1) + d(r_1, r_2) = d(q, r_1) + d(r_1, r_2)$$

εχουμε δηλαδή ότι $d(q, r_2) = d(q, r_1) + d(r_1, r_2)$. Αν τώρα, τ είναι το γεωδασιακό τμήμα ελάχιστου μήκους από το r_2 στο r_1 και σ το γεωδιασιακό τμήμα ελάχιστου μήκους από το r_1 στο q (τα τ, σ είναι μοναδικά γιατί $i(M) \geq \pi$), από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι η $\tau \cup \sigma$ σχηματίζει ένα ομαλό γεωδαισιακό τμήμα από το r_2 στο q που διέρχεται από το r_1. Λόγω της μοναδικότητας των γεωδαισιακών, και επειδή $d(p, r_1) = d(q, r_1)$, έπεται τελικά ότι $p = q$, που είναι άτοπο. $\square$

Θεώρημα 5.1 *(Θεώρημα της σφαίρας) Έστω* M *μια πλήρης, συμπαγής και απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Έστω επιπλέον ότι* $1 \geq K_M \geq H > \frac{1}{4}$.

Τότε η M *είναι ομοιομορφική με την* S^n.

Απόδειξη: Έστω $p, q \in M$ τέτοια ώστε $d(p,q) = d(M)$ και $\bar{p}, \bar{q} \in S^n$ ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων. Έστω επίσης $I : T_{\bar{p}}S^n \to T_pM$ μια ισομετρία.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : T_pM \to T_pM$ με $f(v) = t_o v$, όπου το t_o είναι τέτοιο ώστε το σημείο $\exp t_o v$ να είναι το μοναδικό σημείο της γεωδαισιακής $t \mapsto \exp_p tv$ που ισαπέχει από τα p, q, όπως στο λήμμα 5.3. Από το ίδιο λήμμα έπεται ότι $\|f(v)\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}} < \pi \leq i(M) < d(M)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $h : S^n \to M$ ως:

$$h(x) = \begin{cases} p & \text{αν } x = \bar{p} \\ \exp_p\left(\frac{d(x,\bar{p})}{\frac{\pi}{2}}\left(f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(x)\right)\right) & \text{αν } x \in \overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})} - \bar{p} \\ \exp_q\left(\frac{d(x,\bar{q})}{\frac{\pi}{2}}\left(\exp_q^{-1} \circ \exp_p \circ f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(x)\right)\right) & \text{αν } x \in \overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})} - \bar{q} \\ q & \text{αν } x = \bar{q} \end{cases}$$

1. *Η h είναι 1-1.* Επειδή $\|f(v)\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}} < \pi \leq i(M)$, έπεται ότι οι $h_{|\overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})}}, h_{|\overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})}}$ είναι 1-1. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})) \cap h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})) = \emptyset$.

   Έστω, λοιπόν, $x \in h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p}))$. Τότε, για κάποιο $\bar{x} \in B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})$ έχουμε ότι $x = h(\bar{x}) = \gamma(t_o)$, όπου $t_o = \frac{2d(\bar{x},\bar{p})}{\pi}$ και γ η γεωδαισιακή:

   $$\gamma(t) = \exp_p\left(tf \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})\right)$$

   Επειδή $\bar{x} \in B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})$, έπεται ότι $t_o < 1$, και επομένως:

   $$d(x,p) = \left\|\frac{2d(\bar{x},\bar{p})}{\pi} f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})\right\| < \|f(\gamma'(0))\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$$

   Τώρα, αν ήταν $d(p,\gamma(t_o) = x) > d(q,x)$, επειδή $d(p,\gamma(0)) < d(q,\gamma(0))$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα υπήρχε $r \in \gamma$ με

   $$d(p,r) = d(q,r) < \|f(\gamma'(0))\|$$

   το οποίο είναι άτοπο, από την μοναδικότητα του λήμματος 5.3. Συνεπώς, $d(p,x) > d(q,x)$.

   Αντίστοιχα, αν $x \in h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q}))$, τότε $x = h(\bar{x})$ για κάποιο $\bar{x} \in B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})$ και, από τον ορισμό της h, θα είχαμε ότι

   $$d(q,x) = \left\|t_o \exp_q^{-1} \circ \exp_p \circ f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})\right\| <$$

   $$d(q, \exp_p \circ f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})) = d(p, \exp_p \circ f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})) =$$

   $$\|f \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}(\bar{x})\| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$$

   όπου $t_o = \frac{2d(x,\bar{q})}{\pi} < 1$, επειδή $\bar{x} \in B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})$. Όμοια με πριν, χρησιμοποιώντας το λήμμα 6 και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, έπεται ότι $d(q,x) < d(p,x)$.

   Από τα παραπάνω τελικά προκύπτει ότι $h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})) \cap h(B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})) = \emptyset$.

2. *Η h είναι επί.* Πράγματι, αν $d(x,p) \leq d(x,q)$ και γ μια γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(t') = x$ για κάποιο $t' \in (0,+\infty)$, τότε, θα υπάρχει $t_o \geq t'$ ώστε $t_o = \|f(\gamma'(0))\|$. Διαφορετικά, επειδή από το λήμμα 5.2 υπάρχει κάποιο $y \in \gamma$ με $d(y,p) > d(y,q)$ θα είχαμε ότι $d(\gamma(\bar{t}),p) = d(\gamma(\bar{t}),q)$

για κάποιο $\bar{t} > t_o$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την μοναδικότητα του λήμματος 5.3. Έχουμε λοιπόν ότι $\frac{t'}{\|f(\gamma'(0))\|} < 1$, οπότε, από τον τρόπο που ορίστηκε η h, θα έχουμε ότι $h(z) = x$ για

$$z = \exp_{\bar{p}}\left(\frac{\pi t'}{2\|f(\gamma'(0))\|}(I^{-1}(\gamma'(0)))\right) \in \overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{p})}$$

Αντίστοιχα, αν $d(x,p) \geq d(x,q)$ από ένα συμμετρικό επιχείρημα έπεται ότι $x \in h(\overline{B_{\frac{\pi}{2}}(\bar{q})})$.

3. *Η h είναι συνεχής.* Από τον τρόπο που έχει οριστεί, αρκεί να αποδείξουμε την συνέχεια της f. Δεδομένου ότι η $f(tv) = f(v)$ για κάθε v με $\|v\| = 1$, αυτό είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε την συνέχεια της απεικόνισης $v \mapsto \|f(v)\|$ στην μοναδιαία σφαίρα του εφαπτόμενου χώρου.

   Έστω λοιπόν $v_n \in T_pM$ ακολουθία με $\|v_n\| = 1$ και $v \in T_pM$ ώστε

   $$\lim_n v_n = v$$

   Τότε, λόγω της συμπάγειας της M, έπεται ότι $\limsup_n \|f(v_n)\| < +\infty$, και συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f(v_n)\| \to t_o = \limsup_n \|f(v_n)\|$. Λόγω της συνέχειας της $\exp_p$, θα έχουμε ότι $\exp_p \|f(v_n)\| v_n \to \exp_p t_o v$, και επιπλέον, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης της απόστασης, προκύπτει ότι

   $$d(p, \exp_p t_o v) = d(q, \exp_p t_o v)$$

   Τελικά, από την μοναδικότητα του λήμματος 5.3, έπεται ότι $\|f(v)\| = t_o$. Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $\liminf_n \|f(v_n)\| = \|f(v)\|$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η απεικόνιση είναι συνεχής.

Έπεται λοιπόν ότι η h είναι μια συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση ανάμεσα σε δυο συμπαγείς πολλαπλότητες. Επομένως είναι ομοιομορφισμός. □

Γενικά, το θεώρημα ισχύει αν υποθέσουμε απλά ότι η M έχει καμπυλότητα κάτω φραγμένη από έναν γνήσια θετικό αριθμό (οπότε εξασφαλίζεται η συμπάγειά της) και επιπλέον ότι αν

$$\delta = \frac{K_{\min}}{K_{\max}}$$

να έχουμε $\delta > \frac{1}{4}$. Ο αριθμός δ ονομάζεται *pinching* της πολλαπλότητας.

Επιπλέον, από το θεώρημα (4.2), αν η M είναι άρτιας διάστασης και προσανατολίσιμη η απλή συνεκτικότητα μπορεί να αφαιρεθεί από τις υποθέσεις του θεωρήματος (5.1).

Ας παρατηρήσουμε ότι, ενώ οι περιορισμοί στα δυο ημισφαίρια της S^n του ομοιομορφισμού του θεωρήματος (5.1) είναι εμφυτεύσεις, εν γένει δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η h είναι αμφιδιαφόριση. Το πρόβλημα εμφανίζεται στον ισημερινό, όπου η απεικόνιση είναι βέβαια καλά ορισμένη και συνεχής, αλλά, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η εξασφάλιση της διαφορισιμότητας απαιτεί αυστηρότερες συνθήκες συμβιβαστότητας ανάμεσα σε αυτούς τους δύο κλάδους της h.

5.2 Το θεώρημα μεγιστικής διαμέτρου του Toponogov

Θεώρημα 5.2 *Έστω M μια πλήρης πολλαπλότητα Riemann με $K_M \geq H > 0$ και έστω ότι $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Τότε η M είναι ισομετρική με την σφαίρα $S^n_{\frac{1}{\sqrt{H}}}$, καμπυλότητας H.*

Απόδειξη: Έστω $p, q \in M$ ώστε $d(p,q) = \frac{\pi}{\sqrt{H}}$. Θα δείξουμε ότι αν γ μια γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας από το p, τότε $\gamma(\frac{\pi}{\sqrt{H}}) = q$ και άρα είναι ελαχιστοποιούσα.

Έστω λοιπόν $\tau : [0, \frac{\pi}{\sqrt{H}}] \to M$ μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή με $\tau(0) = p$ και $\tau(\frac{\pi}{\sqrt{H}}) = q$. Έστω επίσης γ τυχόν γεωδαισιακό τμήμα από το p με $\|\gamma'\| = 1$ και $L(\gamma) = \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$.

Αν $\alpha = \sphericalangle(\gamma'(0), \tau'(0))$, επειδή η τ είναι ελαχιστοποιούσα και $L(\gamma) = \frac{\pi}{2\sqrt{H}}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Toponogov στην γωνία (γ, τ, α), συγκρίνοντας με την σφαίρα καμπυλότητας H. Έστω λοιπόν $(\bar{\gamma}, \bar{\tau}, \alpha)$ η αντίστοιχη γωνία στην $S^2_{\frac{1}{\sqrt{H}}}$. Τότε:

$$d\left(\gamma\left(\frac{\pi}{\sqrt{H}}\right), \tau\left(\frac{\pi}{\sqrt{H}}\right)\right) \leq d\left(\bar{\gamma}\left(\frac{\pi}{\sqrt{H}}\right), \bar{\tau}\left(\frac{\pi}{\sqrt{H}}\right)\right) = 0$$

αφού στην $S^2_{\frac{1}{\sqrt{H}}}$, όλες οι γεωδαισιακές (μοναδιαίας ταχύτητας) από ένα σημείο της συναντώνται στο αντιδιαμετρικό του μετά από χρόνο $\frac{\pi}{\sqrt{H}}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι ένα γεωδαισιακό τμήμα $\gamma : [0, \frac{\pi}{\sqrt{H}}] \to M$ διέρχεται από το $q = \gamma(\frac{\pi}{\sqrt{H}})$ και έχει ελάχιστο μήκος. Από το θεώρημα του Rauch και από το γεγονός ότι οι γεωδαισιακές δεν είναι ελαχιστοποιούσες μετά το πρώτο συζυγές σημείο έπεται ότι το q είναι το πρώτο συζυγές σημείο κατα μήκος της γ.

Έστω $\bar{p} \in S^n_{\frac{1}{\sqrt{H}}}$ και $\bar{\gamma} \subset S^n_{\frac{1}{\sqrt{H}}}$ μια γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας από το $\bar{p}$ στο αντιδιαμετρικό του σημείο $\bar{q}$. Δηλαδη $\gamma, \bar{\gamma} : [0, \frac{\pi}{\sqrt{H}}] \to M, S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}$. Έστω επίσης μια ισομετρία

$$I : T_pM \to S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}$$

τέτοια ώστε $I(\gamma'(0)) = \bar{\gamma}'(0)$ και $\bar{J}$ ένα πεδίο Jacobi κατά μήκος της $\bar{\gamma}$, με

$$\bar{J}(0) = \bar{J}(\frac{\pi}{\sqrt{H}}) = 0$$

και

$$\left\langle \bar{J}, \bar{\gamma} \right\rangle = 0$$

Αν $P_t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$ και $\bar{P}_t : T_{\bar{p}}S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \to T_{\bar{\gamma}(t)}S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}$ οι παράλληλες μετατοπίσεις κατά μήκος των γ και $\bar{\gamma}$ αντίστοιχα, ορίζουμε κατά μήκος της γ το πεδίο:

$$V(t) = P_t \circ I^{-1} \circ (\bar{P}_t)^{-1}(\bar{J}(t))$$

Τώρα, επειδή η γ είναι ελαχιστοποιούσα, έπεται ότι αν γ_s μια ομαλή μεταβολή της γ, με $\gamma_0 = \gamma$ και $\gamma_s(0) = p,\ \gamma_s(\frac{\pi}{\sqrt{H}}) = q$, έπεται ότι

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s)\bigg|_{s=0} \geq 0$$

Επομένως,

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\langle V', V' \rangle (t) - \langle R(V, \gamma')\gamma', V \rangle (t) \right) dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\left\langle \bar{J}', \bar{J}' \right\rangle (t) - K(\gamma'(t), V(t)) \|V\|^2 \right) dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\left\langle \bar{J}', \bar{J}' \right\rangle (t) - H \left\langle \bar{J}, \bar{J} \right\rangle (t) \right) dt =$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left\langle \bar{J}'' + H\bar{J}, \bar{J} \right\rangle dt = 0, \text{ επειδή το } \bar{J} \text{ είναι πεδίο Jacobi.}$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\langle V', V' \rangle - K(\gamma'(t), V(t)) \|V\|^2 \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\left\langle \bar{J}', \bar{J}' \right\rangle - H \|\bar{J}\|^2 \right) dt = 0$$

Έχουμε τελικά ότι $K(\gamma'(t), V(t)) = H$ για κάθε $t \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{H}}]$. Μάλιστα, το V είναι επίσης πεδίο Jacobi, αφού

$$I(V, V) = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} \left(\langle V', V' \rangle (t) - \langle R(V, \gamma')\gamma', V \rangle (t) \right) dt = 0$$

Ας ορίσουμε, λοιπόν, την απεικόνιση $\phi : M - \{q\} \to S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}} - \{\bar{q}\}$, με

$$\phi(x) = \exp_{\bar{p}} \circ I \circ (\exp_p)^{-1}(x)$$

η οποία είναι καλά ορισμένη αμφιδιαφόριση, εφόσον το $(d\exp_p)_y$ είναι ισομορφισμός για κάθε $y \in B_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}(0) \subset T_pM$. Θα αποδείξουμε ότι είναι και ισομετρία.

Έστω $r \in M - \{q\}$ και $v \in T_rM$. Έστω επίσης $r = \gamma(l)$ και $\phi(r) = \bar{\gamma}(l)$,όπου $\gamma, \bar{\gamma}$ γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας από το p και $\bar{p}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, ας είναι $\bar{J}$ το πεδίο Jacobi κατά μήκος της $\bar{\gamma}$ με $\bar{J}(0) = 0$ και $\bar{J}(l) = (d\phi)_r(v)$, και J το αντίστοιχο πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ, όπως ορίστηκε παραπάνω.

Από τον τρόπο που ορίζεται το J, έπεται ότι $\|J(l)\| = \|\bar{J}(l)\| = \|(d\phi)_r(v)\|$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $v = J(l)$, ώστε η ϕ να είναι ισομετρία.

Πρώτον, ας παρατηρήσουμε ότι για το πεδίο J έχουμε ότι $J'(0) = I^{-1}(\bar{J}'(0))$. Πράγματι:

$$J'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{(P_t)^{-1} \circ P_t \circ I^{-1} \circ (\bar{P}_t)^{-1}(\bar{J}(t))}{t} =$$
$$= I^{-1}\left(\lim_{t \to 0} \frac{(\bar{P}_t)^{-1}(\bar{J}(t))}{t}\right) = I^{-1}(\bar{J}'(0))$$

Τότε, επειδή $J(l) = (d\exp_p)_{l\gamma'(0)}(lJ'(0))$ και $\bar{J}(l) = (d\exp_{\bar{p}})_{l\bar{\gamma}'(0)}(l\bar{J}'(0))$, έχουμε ότι:

$$v = (d\phi_r)^{-1}(\bar{J}(l)) = (d\exp_p)_{l\gamma'(0)} \circ I^{-1} \circ ((d\exp_{\bar{p}})_{l\bar{\gamma}'(0)})^{-1}(\bar{J}(l)) =$$
$$= (d\exp_p)_{l\gamma'(0)} \circ I^{-1} \circ ((d\exp_{\bar{p}})_{l\bar{\gamma}'(0)})^{-1}((d\exp_{\bar{p}})_{l\bar{\gamma}'(0)}(l\bar{J}'(0))) =$$
$$= (d\exp_p)_{l\gamma'(0)}(lJ'(0))) = J(l)$$

Έχουμε λοιπόν ότι $\|(d\phi_r)(v)\| = \|\bar{J}(l)\| = \|J(l)\| = \|v\|$. Έπεται λοιπόν, ότι η ϕ είναι ισομετρία.

Λόγω συνέχειας, έπεται ότι η M έχει σταθερή καμπυλότητα H. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η ϕ επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό από την M στην $S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}$ ορίζοντας $\phi(q) = \bar{q}$. Έχουμε, λοιπόν ότι οι M και $S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{H}}}$ είναι δυο απλά συνεκτικές πολλαπλότητες ίδιας διάστασης και καμπυλότητας H, οπότε από το θεώρημα του Cartan έπεται ότι είναι ισομετρικές. □

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειώσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα, κάτω από την ασθενέστερη υπόθεση

$$Ric(x, x) \geq (n-1)H > 0$$

εξακολουθεί να ισχύει.

5.3 Pinching $\geq \frac{1}{4}$

Ένα ερώτημα που προκύπτει φυσιολογικά είναι αν η υπόθεση του θεωρήματος της σφαίρας για το *pinching* μπορεί να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη υπόθεση

$$\frac{K_{\min}}{K_{\max}} \geq \frac{1}{4}$$

ή διαφορετικά $1 \geq K_M \geq \frac{1}{4}$.

Σε αυτήν την περίπτωση το θεώρημα δεν ισχύει εν γένει, αφού τουλάχιστον για άρτια διάσταση μπορεί κανείς να βρεί αντιπαραδείγματα. Ένα από αυτά είναι ο μιγαδικός προβολικός χώρος με διάσταση μεγαλύτερη ή ίση του 4.

Έστω $\mathbb{C}-\{0\} = \{Z = (z_0, \ldots, z_n) \neq 0,\ z_j = x_j + iy_j,\ j = 0, \ldots, n\}$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{C} - \{0\}$ ως

$$W \sim Z \Leftrightarrow z_j = \lambda w_j \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[Z]$ είναι ο μιγαδικος προβολικός χώρος $\mathbb{CP}^n$. Όμοια με την περίπτωση του πραγματικού προβολικού χώρου, βλέπουμε ότι ο $\mathbb{CP}^n$ έχει δομή διαφορικής πολλαπλότητας, πραγματικής διάστασης $2n$. Μάλιστα, ο $\mathbb{PC}^1$ είναι αμφιδιαφορικός με την S^2 [8, σελ.237].

Έστω $(Z, W) = z_0\bar{w}_0 + \ldots + z_n\bar{w}_n$ το ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^{n+1}$, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^{2n+2}$, με $z_j = (x_j, y_j)$. Τότε έχουμε ότι

$$S^{2n+1} = \{N \in \mathbb{C}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{2n+1}\ : (N, N) = 1\}$$

Η αρχική σχέση ισοδυναμίας επάγει στην S^{2n+1} μια σχέση ισοδυναμίας για την οποία

$$Z \sim W \Leftrightarrow e^{i\theta} Z = W, \text{ για κάποιο } \theta$$

Υπάρχει τότε μια διαφορίσιμη απεικόνιση $f : S^{2n+1} \to \mathbb{PC}^n$ που απεικονίζει κάθε σημείο $Z \in S^{2n+1}$ στο σημείο $[Z] \in \mathbb{PC}^n$, και ουσιαστικά απεικονίζει τα σημεία του κύκλου $\{e^{i\theta} Z\}$ της S^{2n+1} στη κλάση ισοδυναμίας $[Z]$ του $Z \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, η οποία ονομάζεται *Hopf fibering*, και το διαφορικό της σε κάθε σημείο είναι επιμορφισμός.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε στον $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ την μετρική Riemann που ορίζεται ως

$$\langle V, W \rangle_Z = \frac{\text{Real}(V, W)}{(Z, Z)}$$

για κάθε $Z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ και $V, W \in T_Z\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$, η οποία περιοριζόμενη στην S^{2n+1} συμπίπτει με την μετρική που επάγεται σε αυτήν από τον $\mathbb{R}^{2n+2}$.
Παρατηρούμε, επίσης, ότι για όλα τα $0 \leq \theta \leq 2\pi$ η απεικόνιση

$$e^{i\theta} : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$$

είναι ισομετρία οπότε με φυσιολογικό τρόπο ορίζεται στον $\mathbb{PC}^n$ η μετρική

$$\langle V, W \rangle_{[Z]} = \left\langle (\bar{V})^N, (\bar{W})^N \right\rangle_Z$$

όπου $\bar{V}, \bar{W} \in T_Z S^{2n+1}$ είναι τέτοια ώστε $V = df_Z(\bar{V}), W = df_Z(\bar{W})$, ενώ με $(\bar{V})^N$ συμβολίζουμε την προβολή του $\bar{V}$ στον κάθετο υπόχωρο του $\frac{d}{d\theta} e^{i\theta Z}\big|_{\theta=0}$. Επειδή ο υπόχωρος $\left\langle \frac{d}{d\theta}e^{i\theta}Z\Big|_{\theta=0}\right\rangle$ του $T_Z S^{2n+1}$, είναι ο πυρήνας του διαφορικού df_Z, έπεται ότι η μετρική αυτή είναι καλά ορισμένη.

Από την θεωρία των Riemannian submersions, [3, σελ. 185-187], έχουμε ότι τελικά, η sectional καμπυλότητα $K(\sigma)$ του $\mathbb{CP}^n$ ως προς αυτή την μετρική ικανοποιεί την ανισότητα [3, σελ 189]

$$1 \leq K(\sigma) \leq 4$$

Επιπλέον, στο [8, σελ. 239] βλέπουμε ότι για τις ομάδες ομολογίας του $\mathbb{CP}^n$ ισχύει

$$H^q(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{για } q = 0, 2, \ldots, 2n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Συνεπώς, ο $\mathbb{CP}^n$ είναι απλά συνεκτική πολλαπλότητα, έχει pinching $\geq \frac{1}{4}$, ενώ δεν είναι ομοιομορφική με την σφαίρα ανίστοιχης διάστασης για $n > 1$.

Παρ'όλα αυτά, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα που οφείλεται στον M.Berger, που συχνά ονομάζεται θεώρημα ελαχιστικής διαμέτρου.

Θεώρημα 5.3 *Έστω M πλήρης και απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με*

$$1 \geq K_M \geq \frac{1}{4}$$

Τότε

1. *Αν $d(M) > \pi$ η M είναι ομοιομορφική με την S^n.*
2. *Αν $d(M) = \pi$ η M είναι ισομετρική με κάποιον συμμετρικό χώρο.*

Απόδειξη:[5, Θεώρημα 6.6]

Το αντιπαράδειγμα που παρουσιάστηκε προηγουμένως, ο μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{CP}^n$, ανήκει στην κατηγορία των συμμετρικών χώρων.[7, 8]

Ενώ, όπως είδαμε, για άρτια διάσταση το θεώρημα (4.1) δεν μπορεί να βελτιωθεί, στην περίπτωση της περιττής διάστασης υπάρχει το εξής αποτέλεσμα των Abresch και Meyer.(1994)

Θεώρημα 5.4 *[1] Υπάρχει μια σταθερά $\delta_{odd} \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, ώστε κάθε συμπαγής, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann M^n περιττής διάστασης, με*

$$1 \geq K_M > \delta_{odd}$$

να είναι ομοιομορφική με την σφαίρα S^n.

Κεφάλαιο 6

Το διαφορίσιμο θεώρημα της σφαίρας

6.1 Το διαφορίσιμο θεώρημα

Ορισμός 6.1 *Μια C^∞ πολλαπλότητα M^n θα καλείται twisted sphere αν υπάρχουν ομαλές εμφυτεύσεις $h_1, h_2 : B^n_{1+\varepsilon} \to M^n$ τέτοιες ώστε*

$$h_1(\overline{B^n_1}) \cup h_2(\overline{B^n_1}) = M^n, \qquad h_1(B^n_1) \cap h_2(B^n_1) = \emptyset$$

όπου B^n_r η ανοιχτή μπάλα του $\Re^n$, με κέντρο το 0 και ακτίνα r.

Πρόταση 6.1 *Μια twisted sphere διάστασης n είναι ομοιομορφική με την S^n.*

Απόδειξη: Έστω h_1, h_2 οι δυο εμφυτεύσεις του ορισμού της twisted sphere. Τώρα, επειδή

$$h_1(B_1) \cap h_2(B_2) = \emptyset$$

$$h_1(\overline{B_1}) \cup h_2(\overline{B_1}) = M$$

έπεται ότι $h_1(\partial B_1) = h_2(\partial B_1)$. Συνεπώς, η σύνθεση

$$f = h_2^{-1} \circ h_1\big|_{S^n}$$

ορίζεται καλά και είναι αμφιδιαφόριση.

Έστω $k_1(ty) = h_1(ty)$ και $k_2(ty) = h_2(tf(y))$ για $t \in [0, 1+\varepsilon)$ και $y \in \partial B_1$. Τότε, οι k_1, k_2 είναι εμφυτεύσεις και ικανοποιούν επίσης τον ορισμό της twisted sphere, ενώ

$$k_2^{-1} \circ k_1(y) = y$$

για κάθε $y \in S^{n-1}$.

Έστω επίσης $\tilde{h}_1(B^n_{1+\varepsilon}) \cup \tilde{h}_2(B^n_{1+\varepsilon}) = S^n$ το συνηθισμένο κάλυμα της S^n, όπου, αν $r : S^n \to S^n$ η ανάκλαση ως προς τον ισημερινό, δηλαδή

$$r(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, -x_{n+1})$$

για $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, τότε $\tilde{h}_2 = r \circ \tilde{h}_1$.

Για $1 - \varepsilon < t < 1 + \varepsilon$ και $y \in S^{n=1} = \partial B^n_1$, έχουμε ότι

$$\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1(ty) = \tilde{h}_1^{-1} \circ r \circ \tilde{h}_1(ty) = (2-t)y$$

Συγκεκριμένα, $\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1(y) = y$ για κάθε $y \in S^{n-1}$.

Ας ορίσουμε λοιπόν την απεικόνιση $\phi : S^n \to M$ ως

$$\phi|_{\tilde{h}_1(\overline{B_1})}(x) = k_1 \circ \tilde{h}_1^{-1}(x)$$

$$\phi|_{\tilde{h}_2(\overline{B_1})}(x) = k_2 \circ \tilde{h}_2^{-1}(x)$$

Η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, αφού για

$$x \in \tilde{h}_1(\partial B_1) = \tilde{h}_2(\partial B_1) = \tilde{h}_1(\overline{B_1}) \cap \tilde{h}_2(\overline{B_1})$$

θα έχουμε

$$k_1 \circ \tilde{h}_1^{-1}(x) = k_1(y) = k_2(y) = k_2 \circ \tilde{h}_2^{-1}(x)$$

και επιπλέον είναι συνεχής και 1-1, επειδή ισχύουν αυτές οι ιδιότητες για τις $k_i, \tilde{h}_i$, και επί.

Τέλος, η S_n είναι συμπαγής και επομένως η ϕ είναι ομοιομορφισμός ανάμεσα στις S^n και M. $\square$

Ορισμός 6.2 *Θα λέμε ότι μια αμφιδιαφόριση f είναι ισοτοπική με μια αμφιδιαφόριση g αν υπάρχει μια ομαλή μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσεων F_t τέτοια ώστε $F_1 = f$ και $F_0 = g$.*

Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι, για να είναι μια twisted sphere αμφιδιαφορική με την S^n αρκεί η αμφιδιαφόριση f που ορίστηκε παραπάνω να είναι ισοτοπική με την ταυτοτική.

Πρόταση 6.2 *Έστω M^n μια twisted sphere. Αν η f είναι ισοτοπική με την ταυτοτική τότε η M είναι αμφιδιαφορική με την σφαίρα S^n.*

Απόδειξη: Έστω, όπως πριν, $\tilde{h}_1(B^n_{1+\varepsilon}) \cup \tilde{h}_2(B^n_{1+\varepsilon}) = S^n$ το συνηθισμένο κάλυμα της S^n. Για την απόδειξη της πρότασης, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμα της M, με εμφυτεύσεις $k_i : B^n_{1+\varepsilon} \to M$ τέτοιες ώστε

$$k_2^{-1} \circ k_1(ty) = (2-t)y \tag{6.1}$$

και να ορίσουμε την αμφιδιαφόριση $H : M \to S^n$ ως

$$H|_{k_i(B^n_{1+\varepsilon})} = \tilde{h}_i \circ k_i^{-1}$$

Η συνθήκη (6.1) εξασφαλίζει ότι η H είναι καλά ορισμένη, αφού

$$\tilde{h}_2^{-1} \circ \tilde{h}_1(ty) = k_2^{-1} \circ k_1(ty) = (2-t)y$$

για $1-\varepsilon < t < 1+\varepsilon$ και $y \in S^{n-1}$ και επομένως

$$\tilde{h}_1 \circ k_1^{-1}(z) = \tilde{h}_2 \circ k_2^{-1}(z)$$

για κάθε $z = k_1(ty) = k_2((2-t)y) \in k_1(B^n_{1+\varepsilon}) \cap k_2(B^n_{1+\varepsilon})$.

Έστω, λοιπόν, h_i οι εμφυτεύσεις της twisted sphere M. Στη συνέχεια, θα κατασκευάσουμε τις k_i μεταβάλοντας κατάλληλα τις h_i ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (6.1).

Ας ορίσουμε $V_i = dh_i(\frac{\partial}{\partial r})$, όπου $\frac{\partial}{\partial r}$ το μοναδιαίο ακτινικό διανυσματικό πεδίο επί του $B^n_{1+\varepsilon} - \{0\}$, και έστω

$$N_{\varepsilon_1} = h_1(B^n_{1+\varepsilon_1} - \overline{B^n_{1-\varepsilon_1}})$$

Παρατηρούμε ότι, για $y \in S^{n-1}$

$$V_1(\|h_2^{-1}(x)\|)(h_1(y)) = (d\|\cdot\|)_{(h_2^{-1}\circ h_1)(y)} \circ d(h_2^{-1} \circ h_1)_y(\frac{\partial}{\partial r}) \neq 0$$

γιατί οι h_1, h_2 είναι εμφυτεύσεις, και η $h_2^{-1} \circ h_1\big|_{S^{n-1}}$ είναι αμφιδιαφόριση της S^{n-1}. Επομένως, εφόσον

$$h_1(\overline{B^n_1}) \cup h_2(\overline{B^n_1}) = M, \text{ και}$$
$$h_1(B^n_1) \cap h_2(B^n_1) = \emptyset$$

έπεται ότι $V_1(\|h_2^{-1}(x)\|) < 0$ στο $h_1(S^{n-1}) = h_2(S_{n-1})$.

Όμοια, έπεται ότι $V_2(\|h_1^{-1}(x)\|) < 0$ στο $h_1(S^{n-1}) = h_2(S_{n-1})$. Κατά συνέπεια, λόγω της συμπάγειας της S^{n-1} και της συνέχειας των h_1, h_2, αν το ε_1 είναι αρκετά μικρό, θα έχουμε ότι $N_{\varepsilon_1} \subset h_2(B^n_{1+\varepsilon})$ και

$$V_1(\|h_2^{-1}(x)\|) < 0, \quad V_2(\|h_1^{-1}(x)\|) < 0 \quad \text{στην περιοχή} \quad N_{\varepsilon_1}$$

Έστω $\alpha : \Re \to \Re$ διαφορίσιμη ώστε

1. $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$
2. $\alpha'(x) \geq 0$
3. $\alpha'(0) = \alpha'(1) = 0$
4. $\alpha(t) = 0$ για $t \notin [0, 1]$

Αν, λοιπόν, $u(t) = \frac{t}{2\varepsilon_1} - \frac{1-\varepsilon_1}{2\varepsilon_1}$, για $1 - \varepsilon_1 < t < 1 + \varepsilon_1$, ας ορίσουμε στο $M - \{h_1(0), h_2(0)\}$ το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο W ως

$$W(h_1(ty)) = (1 - \alpha(u))V_1(h_1(ty)) - \alpha(u)V_2(h_1(ty)) \quad \text{στο} \quad N_{\varepsilon_1}$$

$$W = V_1 \quad \text{στο} \quad h_1(B^n_{1-\varepsilon_1})$$

$$W = -V_2 \quad \text{στο} \quad h_2(B^n_1) - N_{\varepsilon_1}$$

Ουσιαστικά, η παραπάνω διαδικασία ενώνει τα πεδία $V_1, -V_2$ των $h_1(B^n_{1+\varepsilon}),\ h_2(B^n_{1+\varepsilon})$ αντίστοιχα, σχηματίζοντας το διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο W στο $M - \{h_1(0), h_2(0)\}$.

Στη συνέχεια, ας ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία $V_{1,s}$ και $V_{2,s}$ στα $h_1(B^n_{1+\varepsilon_1})$ και $h_2(B^n_1) \cup N_{\varepsilon_1}$ αντίστοιχα, ως εξής:

$$V_{1,s} = \frac{(1-s)V_1 + sW}{((1-s)V_1 + sW)(\|h_1^{-1}(x)\|)}$$

$$V_{2,s} = \frac{(1-s)V_2 - sW}{((1-s)V_2 - sW)(\|h_2^{-1}(x)\|)}$$

Παρατηρούμε ότι

$$V_{1,0} = V_1\ , \quad V_{1,1} = \frac{W}{W(\|h_1^{-1}(x)\|)} \quad \text{και}$$

$$V_{2,0} = V_2\ , \quad V_{2,1} = \frac{-W}{(-W)(\|h_2^{-1}(x)\|)}$$

Η υπόθεση ότι $V_1(\|h_2^{-1}(x)\|) < 0,\ V_1(\|h_2^{-1}(x)\|) < 0$ εξασφαλίζει ότι οι παρονομαστές παραπάνω δεν μηδενίζονται.

Ας είναι $\psi_{i,s,z}$ η ολοκληρωτική καμπύλη του $V_{i,s}$ με $\psi'_{i,s,z}(0) = z \in T_{h_i(0)}M$, και ας ορίσουμε

$$h_{i,s}(x) = \psi_{i,s,z}(t)$$

όπου τα z, t ορίζονται από την σχέση

$$h_i(x) = h_{i,0}(x) = \psi_{i,0,z}(t)$$

Επειδή $V_{i,s}(\|h_i^{-1}(x)\|) = 1 > 0$, έπεται ότι οι $h_{i,s}$ είναι εμφυτεύσεις, ενώ από την ίδια σχέση έπεται ότι

$$\|h_i^{-1}(\psi_{i,0,z}(t))\| = \|h_{i,s}(\psi_{i,s,z}(t))\| = t$$

οπότε προκύπτει ότι

$$h_{1,s}(\partial \bar{B}_1^n) = h_{2,s}(\partial \bar{B}_1^n)$$

και επομένως μπορούμε να ορίσουμε τις αμφιδιαφορίσεις

$$f_s = h_{2,s}^{-1} \circ h_{1,s}\big|_{S^{n-1}}$$

Τότε, για $1 - \varepsilon_1 < t < 1 + \varepsilon_1$, θα έχουμε ότι

$$h_{2,1}^{-1} \circ h_{1,1}(ty) = g(y,t) f_1(y)$$

όπου

$$g : S^{n-1} \times [1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1] \to \Re^+$$

κατάλληλη ομαλή συνάρτηση με $\frac{\partial g}{\partial t} < 0$.

Ας ορίσουμε

$$\beta : S^{n-1} \times [0, 1 + \varepsilon_1] \to \Re^+$$

μια ομαλή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} > 0 \quad \text{και}$$

$$\beta(y,t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_1) \\ \\ g(y, 2-t) & 1 - \varepsilon_1 \le t \le 1 + \varepsilon_1 \end{cases}$$

και ας θέσουμε

$$\hat{h}_1 = h_{1,1}, \quad \hat{h}_2(ty) = h_{2,1}(\beta(f_1^{-1}(y), t) y), \quad \hat{f} = f_1$$

Τότε, έχουμε ότι

$$\hat{h}_2((2-t)\hat{f}(y)) = h_{2,1}(g(y,t) f_1(y)) = h_{1,1}(ty) = \hat{h}_1(ty)$$

οπότε για τις $\hat{h}_1, \hat{h}_2$ έχουμε ότι

$$\hat{h}_2^{-1} \circ \hat{h}_1(ty) = (2-t)\hat{f}(y)$$

Τελικά, έστω $0 < r_1 < r_2 < 1 - \varepsilon_1$, και έστω $F_t : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ μια ισοτοπία με $F_0 = \mathrm{id}$ και $F_1 = \hat{f}$, και ας ορίσουμε

$$k_1 = \hat{h}_1$$

$$k_2(ty) = \begin{cases} \hat{h}_2(ty) & 0 \le t \le r_1 \\ \\ \hat{h}_2(tF_{\alpha(u_o)}(y)) & r_1 \le t \le r_2 \\ \\ \hat{h}_2(t\hat{f}(y)) & r_2 \le t \le 1+\varepsilon_1 \end{cases}$$

όπου $u_o = u_o(t) = \frac{t}{r_2-r_1} - \frac{r_1}{r_2-r_1}$. Τότε

$$k_2^{-1} \circ k_1(ty) = k_2^{-1} \circ \hat{h}_1(ty) = k_2^{-1} \circ \hat{h}_2\left((2-t)\hat{f}(y)\right) = (2-t)y$$

έχουμε δηλαδή ότι οι εμφυτεύσεις k_1, k_2 ικανοποιούν την συνθήκη (6.1), και επομένως, όπως είδαμε στην αρχή της απόδειξης αυτό αρκεί ώστε να κατασκευάσουμε μια αμφιδιαφόριση από την M στην S^n. $\square$

Για να ελέγξουμε αν, τελικά, μια αμφιδιαφόριση είναι ισοτοπική με την ταυτοτική, πολύ χρήσιμη είναι ακόλουθη πρόταση. Να σημειώσουμε ότι στο εξής οι πράξεις μεταξύ διανυσμάτων της S^{n-1} θα γίνονται μέσω παράλληλης μετατόπισης στο $0 \in \Re^n$.

Πρόταση 6.3 *Έστω $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ μια αμφιδιαφόριση. Αν για όλα τα $y \in S^{n-1}$ και $v \in T_yS^{n-1}$ με $\|v\| = 1$ έχουμε*

$$d(y, f(y)) \le \frac{\pi}{2}, \qquad \|v - df_y(v)\| < 1$$

τότε η f είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη: Εφόσον κάθε y δεν είναι αντιδιαμετρικό του $f(y)$ η οικογένεια $\{f_t\}$ που ορίζεται ως:

$$f_t(y) = \exp_y(t \exp_y^{-1} f(y))$$

είναι καλά ορισμένη και ομαλή. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f_t είναι αμφιδιαφόριση για κάθε t, οπότε η f_t θα είναι η ζητούμενη ισοτοπία. Μάλιστα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε t η f_t είναι τοπική αμφιδιαφόριση, αφού τότε, επειδή η S^{n-1} είναι συμπαγής και συνεκτική, οι f_t θα είναι απεικονίσεις επικάλυψης [4, σελ. 374] και άρα, λόγω της απλής συνεκτικότητος θα είναι αμφιδιαφορίσεις [4, σελ.382].

Έστω, λοιπόν, $\phi(s)$ μια καμπύλη ώστε

$$\phi(0) = u \in S^{n-1}, \qquad \phi'(0) = v, \text{με } \|v\| = 1$$

Από τον ορισμό της f_t έπεται ότι για κάθε s η καμπύλη $t \mapsto f_t(\phi(s))$ είναι γεωδαισιακή, και επομένως, το πεδίο

$$Z(t) \equiv df_t(v) = \frac{d}{ds} f_t(\phi(s))\bigg|_{s=0}$$

είναι ένα πεδίο Jacobi κατά μήκος της γεωδαισιακής $t \mapsto f_t(u)$, και μάλιστα

$$Z(0) = v, \qquad Z(1) = df(v), \quad \text{και γενικά } Z(t) = df_t(v)$$

Έστω $\beta = d(u, f(u))$. Αν $\beta = 0$, τότε

$$Z(t) = tdf(v) + (1-t)v$$

Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ελέγξουμε ότι το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ένα πεδίο Jacobi πάνω στην γεωδαισιακή $\gamma(t) = u$, το οποίο ικανοποιεί τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με το Z, οπότε, από την μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης Jacobi, τα δυο πεδία ταυτίζονται.

Τότε, αν για κάποιο t είχαμε $Z(t) = 0$, θα έπρεπε $(df)_u(v) = -kv$ για $k > 0$, οπότε, επειδή $\|v\| = 1$ θα είχαμε ότι $\|v - df_u(v)\| \geq 1$, που είναι άτοπο.

Έστω, λοιπόν ότι $\beta \neq 0$. Τότε, αν $T(t) = \frac{d}{dt} f_t(u)$

$$Z(t) = (at + b)T(t) + c \sin \beta t E(t) + d \cos \beta t F(t)$$

όπου τα διανυσματικά πεδία E, F είναι παράλληλα και μοναδιαία, και επιπλεόν είναι κάθετα στο T. Έστω ότι $Z(t_o) = 0$, για κάποιο $t_o \in (0, 1]$. Τότε, από την παραπάνω ισότητα έπεται ότι $E = F$. Μάλιστα, επειδή $0 \leq t \leq 1$ και $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\cos \beta t, \sin \beta t \geq 0$, οπότε $cd < 0$ και $b(a + b) < 0$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\langle Z(0) - Z(1), Z(0) - Z(1) \rangle = \|Z(0)\|^2 + \|Z(1)\|^2 - 2 \langle Z(0), Z(1) \rangle$$

Τώρα, επειδή

$$Z(0) = bT(0) + d, \qquad Z(1) = (a + b)T(1) + (c \sin \beta + d \cos \beta)E$$

και $\langle T(0), T(1) \rangle \geq 0$, $d(c \sin \beta + d \cos \beta) < 0$ έπεται ότι

$$\langle Z(0), Z(1) \rangle = b(a + b) \langle T(0), T(1) \rangle + d(c \sin \beta + d \cos \beta) < 0$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|v - (df)_u(v)\| = \|Z(0) - Z(1)\| \geq \|Z(0)\| = 1$$

που είναι άτοπο.

Στο εξής, με $K(\delta)$ θα συμβολίζουμε κάθε θετική γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο $(0, 1)$, συνεχή, με

$$\lim_{\delta \to 1} K(\delta) = 0$$

Λήμμα 6.1 *Έστω M μια πλήρης πολλαπλότητα Riemann,με $1 \geq K_M > \delta > 0$. Έστω $\gamma : [0,t] \to M$ μια γεωδαισιακή με $\|\gamma'\| = 1$ και J ένα πεδίο Jacobi κατά μήκος της γ με $J(0) = 0$ και $\langle J, \gamma' \rangle \equiv 0$. Αν*

$$E(t) = P_{\gamma(t)}(J'(0))$$

όπου $P_{\gamma(t)}$ η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος της γ, τότε για $0 < t < \pi$,

$$\|J(t) - \sin t E(t)\| \leq (1-\delta)(e^t - 1 - t)\|J'(0)\| = K(\delta)$$

Απόδειξη: Ας ορίσουμε $Z(t) = \sin t E(t)$ και $W(t) = J(t) - Z(t)$. Επίσης, αν $R_t(v) = R(v, \gamma'(t))\gamma'(t)$, η εξίσωση Jacobi για το πεδίο J γράφεται σε μορφή πινάκων ως:

$$\begin{bmatrix} J \\ J' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ J' \end{bmatrix}$$

ενώ για το Z έχουμε:

$$\begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ Z' \end{bmatrix}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix}' &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I - R_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ J' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (I - R_t)(J) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι επειδή $\langle R(x, \gamma')\gamma', y \rangle = \langle R(y, \gamma')\gamma', x \rangle$, ο τελεστής R_t είναι αυτοσυζυγής, καθώς και ο $I - R_t$. Επομένως,

$$\|I - R_t\| = \sup\{|\langle x - R_t(x), x \rangle| \ : \ \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\{|1 - \langle R_t(x), x \rangle| \ : \ \|x\| = 1\} \leq 1 - \delta$$

επειδή, αν $\|x\| = 1$,

$$0 \leq 1 - \langle R_t(x), x \rangle = 1 - \langle R(x, \gamma')\gamma', x \rangle \leq 1 - \delta$$

λόγω της υπόθεσης για την καμπυλότητα της M.

Συγκρίνοντας, μέσω του θεωρήματος του Rauch, με τον $\Re^n$, έπεται ότι

$$\|J(t)\| \leq \|J'(0)\| t$$

οπότε, από τα παραπάνω προκύπτει

$$\left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\|' = (\|W\| + \|W'\|)' \leq \left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix}' \right\| \leq \left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\| + (1-\delta)\|J'(0)\| t$$

και ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση, έπεται

$$\left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\|(t) \leq (1-\delta)\frac{t^2}{2}\|J'(0)\| + \int_0^t \left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\|(s)ds$$

Τώρα, με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της παραπάνω εκτίμησης, αν

$$M = \max_{[0,t]} \left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\|$$

καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\left\| \begin{bmatrix} W \\ W' \end{bmatrix} \right\|(t) \leq (1-\delta)\left(\frac{t^2}{2} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right)\|J'(0)\| + M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

οπότε παίρνοντας όριο $n \to +\infty$, έχουμε ότι

$$\left\| \begin{bmatrix} W(t) \\ W(t)' \end{bmatrix} \right\| = \|W(t)\| + \|W'(t)\| \leq (1-\delta)(e^t - 1 - t)\|J'(0)\|$$

από όπου προκύπτει ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Έστω M μια πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann με

$$1 \geq K_M > \delta \geq \frac{1}{4}$$

Τότε, από το λημμα 5.3 του προηγούμενου κεφάλαιου έχουμε ότι, αν $p, q \in M$ ώστε $d(p,q) = d(M)$, τοτε για κάθε γεωδαισιακή τ μοναδιαίας ταχύτητας από το p, υπάρχει μοναδικό t_o ώστε

$$\frac{\pi}{2} \leq d(p, \tau(t_o)) = d(q, \tau(t_o)) < \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$$

επειδή αν $\frac{\pi}{2} > d(p,\tau(t_o)) = d(q,\tau(t_o))$, τότε, εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στα σημεία $p, q, \tau(t_o)$ θα είχαμε ότι $d(p,q) < \pi \leq i(M) \leq d(M)$, που είναι άτοπο. Έπεται λοιπόν ότι

$$E \equiv \{x \in M \ : \ d(p,x) = d(q,x)\} = \{\tau(t_o) \ : \tau \text{ γεωδαισιακή από το } p, \ \|\tau'\| = 1\}$$

Λήμμα 6.2 *Αν M όπως παραπάνω, τότε το σύνολο E είναι υποπολλαπλότητα της M. Μάλιστα, αν $x = \tau(t_o) \in E$ και τ_o η ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το q στο $\tau(t_o)$, με $\|\tau_o'\| = 1$, ο T_xE είναι ακριβώς το υπερεπίπεδο που αποτελείται από τα διανύσματα του T_xM που σχηματίζουν ίσες γωνίες με τα διανύσματα $\tau'(t_o), \tau_o'(t_o)$.*

Απόδειξη: Έστω $d_p(x) = d(p,x)$ και $d_q(x) = d(q,x)$. Τότε έχουμε ότι

$$E = (d_p - d_q)^{-1}(0)$$

και μάλιστα, επειδή $i(M) \geq \pi$ έπεται ότι οι d_p, d_q είναι διαφορίσιμες σε μια περιοχή $V = (d_p - d_q)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$ του E. Επιπλέον, έχουμε ότι grad $d_p(\tau(t_o)) = \tau'(t_o)$ και grad $d_q(\tau(t_o)) = \tau_o'(t_o)$. Αφού, λοιπόν, από την μοναδικότητα των γεωδαισιακών, $\tau'(t_o) \neq \tau_o'(t_o)$, έπεται ότι grad $(d_p - d_q)(\tau(t_o)) \neq 0$, και άρα η E είναι υποπολλαπλότητα της M.

Αν $x \in E$ και $v \in T_xE$, αν $\phi(s)$ καμπυλη στην E με $\phi(0) = x, \phi'(0) = v$, εφαρμόζοντας τον τύπο για την πρώτη παράγωγο του μήκους, έχουμε ότι

$$0 = \frac{d}{ds}(d_p - d_q)(\phi(s)) = \frac{1}{t_o}\left(\langle \tau'(t_o), v\rangle - \langle \tau_o'(t_o), v\rangle\right)$$

από όπου προκύπτει ο δεύτερος ισχυρισμός του λήμματος. □

Για ό,τι ακολουθεί, θα συμβολίσουμε με S_p^{n-1} την μοναδιαία σφαίρα του χώρου T_pM. Τότε, οι απεικονίσεις

$$\Phi_p : B_\pi(p) - \{p\} \to S_p^{n-1} \text{ και } \Phi_q : B_\pi(q) - \{q\} \to S_p^{n-1}$$

με

$$\Phi_p(x) = \frac{\exp_p^{-1} x}{\|\exp_p^{-1} x\|}, \Phi_q(x) = \frac{\exp_q^{-1} x}{\|\exp_q^{-1} x\|}$$

είναι διαφορίσιμες και μάλιστα, από τα παραπάνω προκύπτει ότι οι

$$\Phi_p|_E, \Phi_q|_E$$

δίνονται από $\tau(t_o) \mapsto \tau'(0), \tau(t_o) = \tau_o(t_o) \mapsto \tau_o'(0)$. Για αυτές τις απεικονίσεις έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 6.3 *Οι Φ_p^{-1}, Φ_q^{-1} είναι αμφιδιαφορίσεις από το E στις S_p^{n-1}, S_q^{n-1} αντίστοιχα.*

Απόδειξη: Επειδή $i(M) \geq \pi$,έπεται ότι οι $\Phi_p, \Phi_q|_E$ είναι 1-1, ενώ είναι και επί των S_p^{n-1}, S_q^{n-1}. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι για $0 \neq w \in T_{\tau(t_o)}E$,

$$d\Phi_p(w) \neq 0, d\Phi_q(w) \neq 0$$

Έστω, λοιπόν, Z το μοναδικό πεδίο Jacobi κατά μήκος της τ με

$$Z(0) = 0, Z(t_o) = w$$

Τότε, αν $Z'(0) = v + \alpha\tau'(0)$, όπου $v \perp \tau'(0)$, το πεδίο Z γράφεται ως

$$Z(t) = J(t) + \alpha t \tau'(t)$$

όπου J το πεδίο Jacobi κατά μήκος της τ με $J(0) = 0$ και $J'(0) = v$, το οποίο είναι κάθετο στην τ, επειδή $\langle J(t), \tau'(t)\rangle = \langle J'(0), \tau'(0)\rangle\, t = 0$. Μάλιστα, από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $J(t_o) \neq 0$, οπότε και το $v \neq 0$. Έχουμε, λοιπόν,

$$(d\Phi_p)_{\tau(t_o)}(w = Z(t_o)) = (d\Phi_p \circ \exp_p)_{t_o\tau'(0)}(t_o v + t_o\alpha\tau'(0)) = v \neq 0$$

από τον ορισμό της Φ_p. Επομένως, η Φ_p^{-1} είναι αμφιδιαφόριση από την E στο S_p^{n-1}. Όμοια αποδεικνύεται και ο αντίστοιχος ισχυρισμός για την Φ_q. $\square$

Από τα παραπάνω έπεται ότι οι

$$t_o = d_p \circ \Phi_p^{-1} = d_q \circ \Phi_q^{-1}$$

είναι διαφορίσιμες ως προς $\tau'(0)$ και $\tau_o'(0)$.

Για μια πολλαπλότητα Riemann που να ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις, έχουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 6.4 *Η M είναι twisted sphere.*

Απόδειξη: Έστω $\eta(t,s) : [0,1] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}] \to \Re$ μια ομαλή συνάρτηση τέτοια ώστε $\frac{\partial \eta(t,s)t}{\partial t} > 0$ και

$$\eta(t,s) = \begin{cases} \pi & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \\ s & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Έστω I_1, I_2 δυο ισομετρίες

$$I_1 : \Re^n \to T_pM, \qquad I_2 : \Re^n \to T_qM$$

και ας ορίσουμε

$$\psi_p(x) = d_p \circ \Phi_p^{-1}\left(I_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right), \qquad \psi_q(x) = d_q \circ \Phi_q^{-1}\left(I_2\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)$$

Έστω, τώρα,

$$h_1(x) = \exp_p \eta(\|x\|, \psi_p(x)) I_1(x), \qquad h_2(x) = \exp_q \eta(\|x\|, \psi_q(x)) I_2(x)$$

Παρατηρούμε ότι οι h_i είναι 1-1, επειδή $\frac{\partial \eta(t,s)t}{\partial t} > 0$, ενώ είναι και αμφιδιαφορίσεις. Τελικά, από τον τρόπο που ορίστηκαν, για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ οι $h_i|_{B^n_{1+\varepsilon}}$ ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες ώστε η M να είναι twisted sphere. $\square$

Έστω, λοιπόν, M όπως παραπάνω, και p, q σε μέγιστη απόσταση. Ας σταθεροποιήσουμε μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή γ από το p στο q, και μια ισομετρία

I_1 όπως στο προηγούμενο λήμμα. Επίσης, ας είναι s_v η ανάκλαση ως προς το υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο $v \in T_xM$ και $d = d(p,q)$. Στο εξής, θέτουμε

$$I_2 = s_{\gamma'(d)} \circ P_\gamma \circ I_1$$

όπου P_γ είναι η παράλληλη μετατόπιση κατα μήκος της γ από το p στο q.

Ας ορίσουμε $g : S_p^{n-1} \to S_q^{n-1}$ ως $g = \Phi_q \circ \Phi_p^{-1}$, όπου $\tau'(0) \mapsto \tau_o'(0)$.

Τότε, από τον ορισμό των h_1, h_2, έπεται ότι:

$$f(x) = h_2^{-1} \circ h_1\big|_{S^{n-1}} = I_2^{-1} \circ g \circ I_1 = I_1^{-1} \circ P_\gamma^{-1} \circ s_{\gamma'(d)}^{-1} \circ g \circ I_1$$

οπότε, επειδή οι $I_1, P_\gamma, s_{\gamma'(d)}$ είναι ισομετρίες έπεται ότι

$$\|f(x) - x\| = \|s_{\gamma'(d)} \circ P_\gamma(I_1(x)) - g(I_1(x))\|, \qquad \text{για κάθε } x \in S^{n-1}$$

και για κάθε $y \in S_{n-1}$,

$$\|df_y(v) - v\| = \|I_1^{-1} \circ P_\gamma^{-1} \circ s_{\gamma'(d)}^{-1} \circ dg_{I_1(y)} \circ I_1(v) - v\| = \|dg_{I_1(y)}(I_1(v)) - s_{\gamma'(d)} \circ P_\gamma(I_1(v))\|$$

Κατά συνεπεια, για να εκτιμήσουμε τα $\|f(y) - y\|$, $\|df_y(v) - v\|$ αρκεί να εκτιμήσουμε τα

$$\|s_{\gamma'(d)} \circ P_\gamma(x) - g(x)\| \qquad \text{και} \quad \|s_{\gamma'(d)} \circ P_\gamma(v) - dg_x(v)\|$$

για κάθε $x \in S_p^{n-1}$, $v \in T_xS_p^{n-1} \equiv x^\perp$.

Μάλιστα, θα εκτιμήσουμε τα

$$\|s_{\tau_o'(d)} \circ P_{\tau \cup \tau_o}(x) - g(x)\| \qquad \text{και} \quad \|s_{\tau_o(0)'} \circ P_{\tau \cup \tau_o}(v) - dg_x(v)\|$$

για κάθε τ.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να υπενθυμίσουμε τον ακόλουθο τύπο της σφαιρικής τριγωνομετρίας, ο οποίος συνδέει τις πλευρές A, B, C , με τις απέναντι γωνίες α, β, γ ενός γεωδαισιακού τριγώνου στην σφαίρα $S^n_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}}$ καμπυλότητας δ:

$$\cos A\sqrt{\delta} = \cos B\sqrt{\delta} \cos C\sqrt{\delta} + \sin B\sqrt{\delta} \sin C\sqrt{\delta} \cos \alpha \tag{6.2}$$

Λήμμα 6.5 *Έστω M όπως παραπάνω, και έστω $\tau'(0) \in S_p^{n-1}$. Τότε, για το*

$$dg_{\tau'(0)} : T_{\tau'(0)}S_p^{n-1} \equiv \tau'(0)^\perp \to \tau_o'(0) \equiv T_{\tau_o'(0)}S_q^{n-1}$$

έχουμε οτι

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau \cup \tau_o}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| \leq K(\delta)$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε το γεωδαισιακό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία p, q και $\tau(t_o) = \tau_o(t_o)$. Τότε,

$$\pi \leq d(p,q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} \leq t_o \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$$

Έστω $\theta = \sphericalangle(-\tau'(t_o), \tau_o'(t_o))$. Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Toponogov για να συγκρίνουμε με την σφαίρα $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$, έχουμε ότι $\bar{\theta} \leq \theta$, όπου $\bar{\theta}$ η αντίστοιχη γωνία στην $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$. Όμως, η γωνία $\bar{\theta}$ γίνεται ελάχιστη όταν το το τρίγωνο έχει πλευρές $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}, \pi$. Επομένως, για την $\bar{\theta}$ έχουμε ότι

$$\cos\bar{\theta} \leq \cos\theta_{\min} = \cos\pi\sqrt{\delta}$$

Κατά συνεπεια για την γωνία θ έχουμε την εκτίμηση

$$\pi\sqrt{\delta} \leq \theta \leq \pi$$

Έστω, λοιπόν, $v \in T_{\tau'(0)}S_p^{n-1}, \|v\| = 1$ και έστω J το πεδίο Jacobi επί της τ με $J(0) = 0$ και $J'(0) = v \perp \tau'(0)$. Τότε, $J \perp \tau'$. Έστω επίσης $\alpha \in \Re$, τέτοιο ώστε για το πεδίο Jacobi

$$Z(t) = J(t) + \alpha t \tau'(t)$$

να έχουμε $Z(t_o) \in T_{\tau(t_o)}E$, και ας είναι $Z_o(t) = J_o(t) + \beta t \tau_o'(t)$ το πεδίο Jacobi επί της τ_o, με

$$Z_o(0) = 0,\ Z_o(t_o) = Z(t_o)$$

όπου J_o κατάλληλο πεδίο Jacobi, κάθετο στην τ_o.

Τώρα, επειδή

$$\langle Z(t_o), \tau'(t_o)\rangle = \langle Z_o(t_o), \tau_o'(t_o)\rangle$$

έπεται ότι, τελικά

$$Z_o(t) = J_o(t) + \alpha t \tau_o'(t)$$

οπότε και $\|J(t_o)\| = \|J_o(t_o)\|$.

Από τα παραπάνω, και από το λημμα 6.3, προκύπτει ότι

$$dg_{\tau'(0)}(v) = J_o'(0)$$

Επιπλέον, αν $\omega = \sphericalangle(Z(t_o), -\tau'(t_o))$, όπου $\omega \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}$, έχουμε ότι

$$\langle Z(t_o), \tau'(t_o)\rangle = \alpha t_o = \|Z(t_o)\|\cos\omega$$

Συνεπώς,

$$(\alpha t_o)^2 = \left[\|J(t_o)\|^2 + (\alpha t_o)^2\right]\cos^2\omega \leq \|J(t_o)\|^2\cos^2\omega \leq 2\cos^2\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}$$

επειδή, από το θεώρημα του Rauch έπεται ότι $\|J(t_o)\| \leq \frac{\sin t_o\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \leq 2$, λόγω της $\delta > \frac{1}{4}$.

Επομένως, έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση για το $|\alpha|$

$$|\alpha| \leq \frac{2\cos\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}}{t_o}$$

Επίσης από το θεώρημα του Rauch, συγκρίνοντας με την σφαίρα καμπυλότητας 1, έχουμε ότι $\sin t_o\|J_o'(0)\| \leq \|J_o(t_o)\|$, οπότε, επειδή $\|J(t_o)\| = \|J_o(t_o)\|$ προκύπτει ότι

$$\|J_o'(0)\| \leq \frac{\sin\sqrt{\delta}t_o}{\sqrt{\delta}\sin t_o} \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}\sin\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}} = 1 + K(\delta)$$

επειδή $\frac{\pi}{2} \leq t_o \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$.

Έστω, $E(t) = P_{\tau(t)}(J'(0))$ και $E_o(t) = P_{\tau_o(t)}(J_o'(t))$. Τότε,

$$\begin{array}{rlcrl}
 & \|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| & \leq & & \\
\leq & \|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - P_{\tau\cup-\tau_o}(v)\| & + & \|P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| & = \\
= & \|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - P_{\tau\cup-\tau_o}(v)\| & + & \|P_{\tau(t)}(v) - P_{\tau_o(t)} \circ dg_{\tau'(0)}(v)\| & = \\
= & \|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - P_{\tau\cup-\tau_o}(v)\| & + & \|E(t) - E_o(t)\| &
\end{array}$$

Οπότε, ας εκτιμήσουμε τις δυο ποσότητες ξεχωριστά. Καταρχήν,

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - P_{\tau\cup-\tau_o}(v)\| = \|s_{\tau_o'(t_o)} \circ P_\tau(v) - P_\tau(v)\| \leq K(\delta)$$

λόγω συνεχειας, επειδή $\theta \to \pi$ καθώς $\delta \to 1$.

Για την $\|E(t) - E_o(t)\|$, έχουμε

$$\sin t_o\|E(t)-E_o(t)\| \leq \|J(t_o)-\sin t_o E(t_o)\|+\|J(t_o)-J_o(t_o)\|+\|J_o(t_o)-\sin t_o E_o(t_o)\|$$

Όμως, από το λήμμα 6.1, έπεται ότι

$$\|J(t_o) - \sin t_o E(t_o)\| \leq K(\delta),$$

$$\|J_o(t_o) - \sin t_o E_o(t_o)\| \leq K(\delta)$$

Επίσης, για την $\|J(t_o) - J_o(t_o)\|$ έχουμε ότι

$$\|J(t_o) - J_o(t_o)\| = \|\alpha t_o(\tau'(t_o) - \tau_o'(t_o))\| = |\alpha||t_o|\|\tau'(t_o) - \tau_o'(t_o)\| \leq |\alpha||t_o|K(\delta)$$

επειδή $\|\tau'(t_o) - \tau_o'(t_o)\|^2 = 2 + 2\cos\theta \leq 2 + 2\cos\pi\sqrt{\delta} = K(\delta)$. Επομένως, από την εκτίμηση που έχουμε για το $|\alpha|$ έπεται ότι

$$\|J(t_o) - J_o(t_o)\| \leq 2\cos\frac{\pi\sqrt{\delta}}{2}K(\delta) = K(\delta)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έπεται λοιπόν ότι

$$\sin t_o \|E(t_o) - E_o(t_o)\| \leq K(\delta)$$

και επειδή $\sin \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} \leq \sin t_o$ καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\|E(t_o) - E_0(t_o)\| \leq K(\delta)$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| \leq K(\delta)$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό του λήμματος. □

Λήμμα 6.6 *Έστω M όπως παραπάνω και $\tau'(0) \in S_p^{n-1}$. Τότε, για $u = \tau'(0)$ ή για κάθε u με $\langle u, \tau'(0)\rangle = 0$ έχουμε ότι:*

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(u) - g(u)\| \leq K(\delta)$$

Απόδειξη: Έστω $u = \tau'(0)$. Τότε,

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau\cup-\tau_o}(u) - g(u)\| = \|s_{\tau_o'(t_o)}(\tau'(t_o)) - \tau_o'(t_o)\| =$$

$$= \|s_{\tau_o'(t_o)}(\tau'(t_o)) - s_{\tau'(t_o)}(\tau_o'(t_o))\| \leq \|\tau'(t_o) - \tau_o'(t_o)\| \leq K(\delta)$$

επειδή η $s_{\tau'(t_o)}$ είναι ισομετρία, ενώ $\pi\sqrt{\delta} \leq \theta \leq \pi$, όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος.

Έστω τώρα ότι $\langle u, \tau'(0)\rangle = 0$. Έστω, $E(t) = P_{\tau(t)}(u)$ και ας ορίσουμε s_o τέτοιο ώστε

$$\exp_p s_o u = \exp_q s_o g(u)$$

Ας ορίσουμε επίσης την καμπύλη $c(t) = \exp_{\tau(t)} \frac{\pi}{2} E(t)$, για την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα II του Rauch, ώστε να συγκρίνουμε το μήκος της με το μήκος της αντίστοιχης καμπύλης στην σφαίρα $S^n_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}$, η οποία είναι τμήμα ενός παράλληλου κύκλου με ακτίνα $\frac{\pi}{2}$. Έχουμε λοιπόν,

$$L(c) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \sin \frac{\pi}{2}(1 - \sqrt{\delta}) = K(\delta)$$

Αντίστοιχα, αν $E_o(t)$ το παράλληλο πεδίο κατά μήκος της τ_o, τέτοιο ώστε το $E(t_o)$ να είναι το διάνυσμα με την μικρότερη γωνία από το $\tau_o'(t_o)$, και $c_o(t) = \exp_{\tau_o(t)} s_o E_o(t)$, όπως παραπάνω έχουμε ότι

$$L(c_o) \leq K(\delta)$$

Κατα συνέπεια, η τριγωνική ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$d(\exp_p s_o u, \exp_{\tau(t_o)} s_o E(t_o)) \leq 2\left(s_o - \frac{\pi}{2}\right) + L(c) \leq K(\delta)$$

$$d(\exp_q s_o g(u), \exp_{\tau_o(t_o)} s_o E(t_o)) \leq 2\left(s_o - \frac{\pi}{2}\right) + L(c_o) \leq K(\delta)$$

Επειδή, τώρα, $\pi\sqrt{\delta} \leq \theta \leq \pi$ έπεται ότι

$$\omega = \sphericalangle(E(t_o), E_o(t_o)) = \sphericalangle(P_{\tau \cup -\tau_o}, E_o(0)) \leq K(\delta)$$

Εφαρμόζοντας, λοιπόν το θεώρημα του Toponogov, έχουμε ότι

$$d(\exp_{\tau(t_o)} s_o E(t_o), \exp_{\tau(t_o)} s_o E_o(t_o)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}(1 - \sqrt{\delta}) = K(\delta)$$

$$d(\exp_q s_o E_o(0), \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u)) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}(1 - \sqrt{\delta}) = K(\delta)$$

Τελικά, από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι

$$d(\exp_p s_o u, \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u)) \leq K(\delta)$$

και επειδή, $\exp_p s_o u = \exp_q s_o g(u)$, έχουμε

$$d(\exp_q s_o g(u), \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u)) \leq K(\delta)$$

Αν σ η ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το $\exp_q s_o g(u)$ στο $\exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u)$, τότε,

$$\begin{aligned} d(q, \sigma(t)) &\leq s_o + \frac{d(\exp_q s_o g(u), \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u))}{2} \\ &\leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} + \frac{d(\exp_q s_o g(u), \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u))}{2} \end{aligned}$$

επομένως, αν το $K(\delta)$ στην προηγούμενη εκτίμηση γίνει μικρότερο του $2\pi\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\delta}}\right)$, η σ θα περιέχεται στην γεωδαισιακή ανοιχτή μπάλα $B_\pi(q)$ γύρω από το q, οπότε, επειδή $i(M) \geq \pi$, είναι δυνατόν να εφαρμοστεί το πόρισμα του θεωρήματος του Rauch I (συγκρίνοντας με την σφαίρα S_1^n). Επομένως, αν $\bar{\sigma}$ η αντίστοιχη καμπύλη στην S_1^n, τότε

$$L(\bar{\sigma}) \leq L(\sigma) = d(\exp_q s_o g(u), \exp_q s_o P_{\tau \cup -\tau_o}(u)) \leq K(\delta)$$

Από τον τύπο που συνδέει τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου στην σφαίρα, έχουμε λοιπόν ότι

$$\cos K(\delta) \leq \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} + \sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} \cos\alpha$$

όπου $\alpha = \sphericalangle(g(u), P_{\tau \cup -\tau_o}(u))$. Συνεπώς,

$$\cos\alpha \geq \frac{\cos K(\delta) - \cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}}{\sin^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}} = 1 - K(\delta)$$

που συνεπάγεται ότι

$$\alpha \leq K(\delta)$$

Έχουμε, λοιπόν, λόγω συνέχειας, ότι

$$\|s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau \cup -\tau_o}(u) - g(u)\| \leq K(\delta)$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πριν προχωρίσουμε στην απόδειξη του διαφορίσιμου θεωρήματος της σφαίρας, θα χρειαστούμε ένα ακόμη λήμμα.

Λήμμα 6.7 *Υπάρχει συνάρτηση $\mu(\varepsilon) \geq 0$, με $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon) = 0$, ώστε αν $f^\varepsilon : S^{n-1} \to S^{n-1}$ μια οικογενεια αμφιδιαφορίσεων τέτοια ώστε*

1. *Για κάθε v, με $\|v\| = 1$,*

$$1 - \varepsilon \leq \|df_y^\varepsilon(v)\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$$

2. *Υπάρχει $y_o \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $d(y_o, f^\varepsilon(y_o)) < \varepsilon$ και για κάθε $y_1 \in S^{n-1}$ με $d(y_o, y_1) = \frac{\pi}{2}$ να έχουμε $d(y_1, f^\varepsilon(y_1)) < \varepsilon$.*

τότε για κάθε $y \in S^{n-1}$ θα έχουμε $d(y, f^\varepsilon(y)) < \mu(\varepsilon)$.

Απόδειξη: Αρκεί να υποθέσουμε ότι y δεν είναι αντιδιαμετρικό του y_1, όπου y_1 το μέσο του γεωδαισιακού τμήματος που συνδέει το y_o με το αντιδιαμετρικό του και διέρχεται από το y. Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα με κορυφές $y_o, f^\varepsilon(y), y$ και $y_o, f^\varepsilon(y), y_1$, και ας είναι θ_1, θ_2 οι γωνίες τους στο y_o. Τότε $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ Εφαρμόζοντας την (6.2) έχουμε:

$$\cos d(y, f^\varepsilon(y)) = \cos d(y_o, y) \cos d(y_o, f^\varepsilon(y)) + \sin d(y_o, y) \sin d(y_o, f^\varepsilon(y)) \cos\theta_1$$

Επισης, πάλι από την (6.2) θα έχουμε:

$$\cos d(y_1, f^\varepsilon(y)) = \sin d(y_o, f^\varepsilon(y)) \cos\theta_1$$

Οπότε καταλήγουμε στην ισότητα:

$$\cos d(y, f^\varepsilon(y)) = \cos d(y_o, y) \cos d(y_o, f^\varepsilon(y)) + \sin d(y_o, y) \cos d(y_1, f^\varepsilon(y))$$

Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι για μικρό ε

$$d(f^\varepsilon(y_o), f^\varepsilon(y)) - \varepsilon \leq d(y_o, f^\varepsilon(y)) \leq \varepsilon + d(f^\varepsilon(y_o), f(y))$$

$$d(f^\varepsilon(y_1), f^\varepsilon(y)) - \varepsilon \leq d(y_1, f^\varepsilon(y)) \leq \varepsilon + d(f^\varepsilon(y_1), f(y))$$

Επίσης, από το (1) της υπόθεσης προκύπτει ότι

$$(1-\varepsilon)d(y_o,y) \leq d(f^\varepsilon(y_o), f^\varepsilon(y)) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} d(y_o,y)$$

$$(1-\varepsilon)d(y_1,y) \leq d(f^\varepsilon(y_1), f^\varepsilon(y)) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} d(y_1,y)$$

Επομένως,

$$\kappa(y_o,y,\varepsilon) \leq d(y_o, f^\varepsilon(y)) \leq \lambda(y_o,y,\varepsilon)$$

$$\kappa(y_1,y,\varepsilon) \leq d(y_1, f^\varepsilon(y)) \leq \lambda(y_1,y,\varepsilon)$$

όπου $\kappa(\zeta,y,\varepsilon) = (1-\varepsilon)d(\zeta,y) - \varepsilon$ και $\lambda(\zeta,y,\varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{1-\varepsilon}d(\zeta,y)$ είναι γνησίως αύξουσα και φθίνουσα αντίστοιχα ως προς ε και μάλιστα

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \kappa(\zeta,y,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(\zeta,y,\varepsilon) = d(\zeta,y)$$

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d(y_o, f^\varepsilon(y)) = d(y_o,y)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d(y_1, f^\varepsilon(y)) = d(y_1,y)$$

Έχουμε, λοιπόν ότι,

$$\cos d(y, f^\varepsilon(y)) \geq \cos d(y_o,y)\cos\lambda(y_o,y,\varepsilon) + \sin d(y_o,y)\cos\lambda(y_1,y,\varepsilon) = M_1(y,\varepsilon)$$

αν $d(y_o,y) < \frac{\pi}{2}$,

$$\cos d(y, f^\varepsilon(y)) \geq \cos d(y_o,y)\cos\lambda(y_o,y,\varepsilon) + \sin d(y_o,y)\cos\kappa(y_1,y,\varepsilon) = M_2(y,\varepsilon)$$

αν $d(y_o,y) > \frac{\pi}{2}$, και

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d(y, f^\varepsilon(y)) = 1$$

αφού $\cos d(y_1,y) = \sin d(y_o,y)$. Επίσης, οι $M_1(y,\varepsilon), M_2(y,\varepsilon)$ είναι γνησίως αύξουσες ως προς ε και $\lim_{\varepsilon\to 0} M_i(y,\varepsilon) = 1$. Συνεπώς, υπάρχει συνάρτηση $\mu(\varepsilon)$ γνησίως φθίνουσα, με $\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon) = 0$, ώστε

$$\cos d(y, f^\varepsilon(y)) \geq \cos\mu(\varepsilon)$$

και άρα $d(y, f^\varepsilon(y)) \leq \mu(\varepsilon)$. $\square$

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το διαφορίσιμο θεώρημα της σφαίρας.

Θεώρημα 6.1 *Υπάρχει $1 > \delta \geq \frac{1}{4}$ ώστε αν M^n είναι μια πλήρης, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann διάστασης n, που να ικανοποιεί*

$$1 \geq K_M > \delta \geq \frac{1}{4}$$

τότε είναι αμφιδιαφορική με την σφαίρα S^n με την συνηθισμένη διαφορική δομή.

Απόδειξη: Από το λήμμα 6.4, έπεται ότι η M είναι twisted sphere. Επίσης, από τα λήμματα 6.6 και 6.7 έπεται ότι για κάθε τ και $u \in S_p^{n-1}$

$$\|g(u) - s_{\tau_o'(0)} \circ P_{\tau \cup -\tau_o}\| \leq K(\delta)$$

ενώ το λήμμα 6.5 συνεπάγεται ότι

$$\|s_{\tau_o'} \circ P_{\tau \cup -\tau_o}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| \leq K(\delta)$$

για κάθε τ και $v \in T_{\tau'(0)} S_p^{n-1} \equiv \tau'(0)^{\perp}$. Ειδικότερα, αν γ είναι μια ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή από το p στο q, θα έχουμε ότι

$$\|g(u) - s_{\gamma'(d)} \circ P_{\gamma}(u)\| \leq K(\delta)$$

για κάθε $u \in S_p^{n-1}$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, από τα παραπάνω προκύπτει ότι για κάθε $\tau'(0) \in S_p^{n-1}$ και $v \in \tau'(0)^{\perp}$

$$\|s_{\gamma} \circ P_{\gamma}(v) - dg_{\tau'(0)}(v)\| \leq K(\delta)$$

Από την παρατήρηση πρίν από το λήμμα 6.5, έπεται λοιπόν ότι

$$\|f(u) - u\| \leq K(\delta), \text{ για κάθε } u \in S^{n-1} \text{ και}$$

$$\|df_y - id\| \leq K(\delta), \text{ για κάθε } y \in S^{n-1}$$

Επομένως, για δ αρκετά κοντά στο 1, η f ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 6.3, οπότε η f είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση, και από την πρόταση 6.2 έπεται ότι η M είναι αμφιδιαφορική με την σφαίρα S^n. □

6.2 Γενικεύσεις και συναφή αποτελέσματα

Η μελέτη της επίδρασης μια υπόθεσης pinching για την μετρική μιας πολλαπλότητας Riemann θετικής καμπυλότητας στην τοπολογία της πολλαπλότητας έχει δώσει, στην περίπτωση άρτιας διάστασης έχει δώσει το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.2 *(Cheeger(1970),Weinstein(1967)) Δοθέντων $n, \delta > 0$ υπάρχουν πεπερασμένες κλάσεις αμφιδιαφορικών πολλαπλοτήτων διάστασης $2n$ που είναι δυνατόν να εφοδιαστούν με μετρική Riemann ώστε $1 \geq K_M \geq \delta$.*

Επίσης, οι Simon Brendle και Richard Schoen, εφαρμόζοντας την μέθοδο της Ricci flow σε πολλαπλότητες με κατά σημείο pinching$\geq \frac{1}{4}$, δηλαδή ότι για κάθε p,

$$0 < K(\sigma_1) \leq 4K(\sigma_2)$$

για κάθε δύο διδιάστατους υποχώρους $\sigma_1, \sigma_2 \subset T_pM$, απέδειξαν το εξής

Θεώρημα 6.3 *Κάθε πολλαπλότητα με κατά σημείο $\frac{1}{4}$-pinched θετική καμπυλότητα δέχεται μετρική με γνήσια θετική σταθερή καμπυλότητα.*

καθώς και το

Θεώρημα 6.4 *Αν M μια συμπαγής, απλά συνεκτική πολλαπλότητα Riemann διάστασης $n \geq 4$ με κατά σημείο $\frac{1}{4}$-pinched θετική καμπυλότητα, αν δεν είναι ισομετρική με κάποιον συμμετρικό χώρο, τότε θα είναι αμφιδιαφορική με την σφαίρα S^n.*

το οποίο τελικά δίνει καταφατική απάντηση στο ερώτημα αν οι υποθέσεις του τοπολογικού θεωρήματος της σφαίρας εξασφαλίζουν ότι η πολλαπλότητα είναι αμφιδιαφορική με την S^n.

Βιβλιογραφία

[1] U.Abresch, W.T.Meyer: A sphere theorem with a pinching constant below $\frac{1}{4}$. J.Diff.Geometry

[2] U.Abresch, W.T.Meyer: Injectivity radius estimates and Sphere theorems, Comparison Geometry, MSRI Publications, Volume 30, 1997

[3] M.P do Carmo: Riemannian Geometry, Boston:Birkhauser 1992

[4] M.P do Carmo: Differential Geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976

[5] J.Cheeger & D.Ebin: Comparison theorems in Riemannian Geometry, North Holland 1975

[6] I.Chavel: Riemannian Geometry:A modern introduction, Cambridge University Press

[7] S.Helgason: Differential Geometry and Symmetric Spaces, AMS Chelsea Publishing 1962

[8] J.Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Springer

[9] W.Klingenberg: Riemannian Geometry, Walter de Gruyter 1995

[10] J. Milnor: On Manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Mathematics Vol 64, No. 2, September 1956

[11] J. Milnor: Morse theory, Princeton University Press, 1963

[12] E. Ruh: Curvature an differentiable structures on spheres, Bull. Am. Math. Soc. 77(1), 1971

[13] M. Sugimoto, K.Shiohama και H.Karcher: On the differentiable pinching problem, Math. Ann. 195, 1971

[14] M.Spivac: A comprehensive introduction to Differential Geometry